

BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

SESSION 2018

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Corrigé proposé par M DESHAYES, professeur de mathématiques de l'Institut et Centre d'Optométrie de Bures-sur-Yvette.



EXERCICE 1

A. Étude d'une série statistique

1°) Un ajustement affine de y en x n'est pas approprié car les points du graphique ne sont pas proches d'une droite.

2°)

a) $r \cong -0,994$

b) L'ajustement affine de z en x est justifié car le coefficient de corrélation linéaire de la série (x, z) est proche de -1 .

3°) $z = -0,6x + 5,3$

4°) $z = \ln(y - 20) = -0,6x + 5,3$

$$y - 20 = e^{-0,6x + 5,3}$$

$$y = e^{-0,6x + 5,3} + 20$$

$$y = e^{5,3} \times e^{-0,6x} + 20$$

y est de la forme $y = A e^{-0,6x} + 20$ avec $A = e^{5,3} \cong 200$

B. Résolution d'une équation différentielle

$$1^\circ) -\frac{b}{a} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5} = -0,6$$

Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont donc les fonctions f définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = k e^{-0,6x}$ où $k \in \mathbb{R}$

2°) La fonction g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $g'(x) = 0$

La fonction g est solution de l'équation différentielle (E) donc

$$10 g'(x) + 6 g(x) = 120, \text{ pour tout } x \text{ de } [0 ; +\infty[$$

$$0 + 6c = 120$$

$$\text{Donc } c = \frac{120}{6} = 20$$

3°) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = k e^{-0,6x} + g(x) = k e^{-0,6x} + 20$ où $k \in \mathbb{R}$

$$4^\circ) f(0) = 220$$

$$k e^0 + 20 = 220$$

$$k = 220 - 20 = 200$$

Conclusion : f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 200 e^{-0,6x} + 20$

C. Étude d'une fonction

1°) La ligne 1 du logiciel de calcul formel fournit une expression de la dérivée de la fonction f : $f'(x) = -120 e^{-0,6x}$

$e^{-0,6x} > 0$, pour tout x de $[0 ; +\infty[$ donc $f'(x) < 0$, pour tout x de $[0 ; +\infty[$

donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

2°) La ligne 2 du logiciel de calcul formel fournit une expression d'une primitive de la fonction f : $F(x) = -\frac{1000}{3} e^{-0,6x} + 20x$

$$\text{La valeur moyenne de } f \text{ sur } [0 ; 10] \text{ est : } \frac{1}{10-0} \int_0^{10} f(x) dx = \frac{1}{10} [F(x)]_0^{10}$$

$$= \frac{1}{10} (F(10) - F(0)) = \frac{-\frac{1000}{3} e^{-6} + 200 - (-\frac{1000}{3} e^0)}{10} = \frac{-\frac{1000}{3} e^{-6} + 200 + \frac{1000}{3}}{10} \cong 53$$

La valeur moyenne de f sur $[0 ; 10]$ est d'environ 53.

3°) D'après la question 1°) et la limite de f en $+\infty$ donnée en ligne 3 du logiciel, on a :

x	0	$+\infty$
Variations de f		

Donc la valeur minimale de f est 20 ; ce qui permet d'affirmer que le nombre de ventes annuelles de paires de ce type de lentilles de couleur ne peut pas être égal à 1500 (15 centaines)

D. Étude d'une suite

$$1^\circ) v_{n+1} = u_{n+1} - 80 = 0,95 u_n + 4 - 80 = 0,95 u_n - 76$$

$$\text{Avec } u_n = v_n + 80$$

donc $v_{n+1} = 0,95 (v_n + 80) - 76 = 0,95 v_n + 76 - 76 = 0,95 v_n$, pour tout entier n , donc la suite (v_n) est la suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0 = u_0 - 80 = 150 - 80 = 70$.

$$2^\circ) \text{ a) } v_n = v_0 q^n = 70 \times 0,95^n ; \text{ pour tout entier } n.$$

$$\text{ b) } u_n = v_n + 80 = 70 \times 0,95^n + 80 ; \text{ pour tout entier } n.$$

3°) En sortie de l'algorithme, la variable s contient $u_0 + u_1 + \dots + u_{23}$ donc 2 911 est le nombre total de ventes de ces nouvelles lentilles de couleur au cours des 24 premiers mois.

$$4^\circ) \quad 70 \times 0,95^n + 80 \leq 100$$

$$70 \times 0,95^n \leq 100 - 80$$

$$0,95^n \leq 20 / 70$$

$$\ln(0,95^n) \leq \ln(2/7)$$

$$n \times \ln 0,95 \leq \ln(2/7)$$

$$n \geq \frac{\ln(\frac{2}{7})}{\ln 0,95} \quad \text{avec} \quad \frac{\ln(\frac{2}{7})}{\ln 0,95} \cong 24,4$$

Conclusion : Le plus petit entier naturel n tel que $70 \times 0,95^n + 80 \leq 100$ est 25.

Interprétation : À partir du 26^{ème} mois, le nombre de clients qui achètent les nouvelles lentilles de couleur est inférieur à 100.

EXERCICE 2

A. Loi exponentielle

$$1^\circ) P(T \leq 6) = 1 - e^{-0,125 \times 6} \cong 0,528$$

$$2^\circ) P(T > 9) = 1 - P(T \leq 9) = 1 - (1 - e^{-0,125 \times 9}) = e^{-0,125 \times 9} \cong 0,325$$

$$3^\circ) E(T) = 1/0,125 = 8$$

Interprétation : Sur une longue période, la durée moyenne de bon fonctionnement de la meuleuse entre deux étalonnages est proche de 8 jours.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

1°) a)

- On considère une épreuve de Bernoulli, qui consiste à prélever un seul verre avec :
Succès : le verre prélevé a un défaut de courbure, de probabilité $p = 0,01$
Échec : l'évènement contraire.
- On répète 500 fois cette épreuve de façon identique et indépendante car tirage avec remise.
- La variable aléatoire X compte le nombre de succès obtenus.
- Donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,01$.

- b) $P(X = 5) \cong 0,176$
 c) $P(X < 4) = P(X \leq 3) \cong 0,264$

2°)

- a) $\mu = np = 500 \times 0,01 = 5$
 b) $P(Y \leq 3) \cong 0,265$

C. Test d'hypothèse

1°) D'après le théorème de la limite centrée, la variable aléatoire F suit la loi normale :

- d'espérance p qui est égale à 0,10 sous H_0
- d'écart type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,1(1-0,1)}{400}} = 0,015$

2°) La valeur approchée au millième de a tel que $P(F \leq a) = 0,95$ est : 0,125.

3°) On prélève un échantillon de 400 verres polis dans la production et on calcule la fréquence f des verres défectueux.

Si $f \leq 0,125$, alors on accepte H_0

Sinon on rejette H_0

4°) Calcul de f : $f = 46 / 400 = 0,115$

Décision : $0,115 \leq 0,125$ donc on accepte H_0

donc on ne peut pas considérer, au seuil de 5%, qu'il y a plus de 10 % de verres défectueux dans la production des verres polis dans la journée.

D. Évènements indépendants

1°) $P(D \cap E) = P(D) \times P(E)$ car les évènements sont indépendants

$$= 0,05 \times 0,08 = 0,004$$

2°) $P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E)$

$$= 0,05 + 0,08 - 0,004 = 0,126$$

3°) La probabilité que le verre contrôlé n'ait aucun défaut est :

$$P(\overline{D \cup E}) = 1 - P(D \cup E) = 1 - 0,126 = 0,874.$$