

**BTS OPTICIEN LUNETIER**

**MATHÉMATIQUES**

**SESSION 2024**

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Corrigé proposé par M. DESHAYES, professeur de mathématiques à

l'institut et campus d'optique de Bures-sur-Yvette.

**EXERCICE 1**

**Partie A. Étude d'une série statistique**

1. Un ajustement affine de  $y$  en  $t$  n'est pas pertinent car les points du graphique ne sont pas proches d'une droite.
- 2.

Temps $t$ (minutes)	0	1	2	3	4	5	6
Température $y$ ( en °C)	150	113	82	65	52	44	40
$z = \ln (y - 28)$	4,80	4,44	3,99	3,61	3,18	2,77	2,48

- a. La corrélation linéaire de la série  $(t ; z)$  est bonne car  $r \approx - 1$ .
- b. Le nuage de points  $(t ; z)$  n'a pas une allure croissante mais décroissante car  $r < 0$

4.  $z = - 0,4 t + 4,8$

5.  $z = \ln (y - 28) = - 0,4t + 4,8$

$$y - 28 = e^{-0,4t + 4,8}$$

$$y = e^{-0,4t + 4,83} + 28$$

$$y = e^{-0,4t} \times e^{4,83} + 28$$

$$y \text{ est de la forme } y = C e^{-0,4t} + 28 \quad \text{avec } C = e^{4,8} \approx 122$$

## Partie B. Équation différentielle

1. Les solutions de l'équation différentielle ( $E_0$ ) sont les fonctions  $f$  définies sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $f(t) = k e^{-\frac{2}{5}t} = k e^{-0,4t}$  où  $k \in \mathbb{R}$

2.

- La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  et  $g'(t) = 0$
- La fonction  $g$  est solution de l'équation différentielle ( $E$ ) donc

$$5g'(t) + 2g(t) = 56, \text{ pour tout } t \text{ de } [0 ; +\infty[$$

$$0 + 2c = 56$$

$$\text{Donc } c = \frac{56}{2} = 28$$

3. Les solutions de l'équation différentielle ( $E$ ) sont les fonctions  $f$  définies sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $f(t) = k e^{-0,4t} + g(t) = k e^{-0,4t} + 28$  où  $k \in \mathbb{R}$

4.  $f(0) = 150$

$$k e^0 + 28 = 150$$

$$k = 150 - 28 = 122$$

Conclusion : La fonction  $f$  recherchée est définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(t) = 122 e^{-0,4t} + 28$$

## Partie C. Étude d'une fonction

1. La limite de  $f$  en  $+\infty$  est égale à 28. C'est cohérent avec le contexte de l'exercice car au bout d'un long moment, le matériau est à la température ambiante de 28°C.

2. a.  $f(t) \leq 50$

$$122 e^{-0,4t} + 28 \leq 50$$

$$122 e^{-0,4t} \leq 50 - 28$$

$$e^{-0,4t} \leq \frac{22}{122} \quad \text{et} \quad \frac{22}{122} = \frac{11}{61}$$

donc la condition revient à résoudre l'inéquation :  $e^{-0,4t} \leq \frac{11}{61}$

$$\text{b. } e^{-0,4t} \leq \frac{11}{61}$$

$$-0,4t \leq \ln\left(\frac{11}{61}\right)$$

$$t \geq \frac{\ln\left(\frac{11}{61}\right)}{-0,4}$$

$$\text{avec } \frac{\ln\left(\frac{11}{61}\right)}{-0,4} \approx 4,282$$

et 4,282 minutes  $\approx$  4 minutes et  $0,282 \times 60$  secondes  $\approx$  4 min et 16,92 s

La température du matériau devient inférieure à  $50^\circ\text{C}$  à partir de 4 min et 17 s

$$3. F(t) = -305e^{-0,4t} + 28t$$

- Déterminons  $F'(t)$  :  $F'(t) = -305 \times (-0,4)e^{-0,4t} + 28 = 122 e^{-0,4t} + 28$
- On a bien  $F'(t) = f(t)$ , pour tout  $t$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ ,

donc la fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

$$4. M = \frac{1}{6-0} \int_0^6 f(t) dt = \frac{1}{6} [F(t)]_0^6 = \frac{1}{6} (F(6) - F(0))$$

$$M = \frac{-305e^{-2,4} + 168 - (-305e^0 + 0)}{6} = \frac{-305e^{-2,4} + 473}{6} \approx 74,2$$

La température moyenne du matériau durant les 6 premières minutes qui suivent la sortie du four est d'environ  $74,2^\circ\text{C}$ .

## EXERCICE 2

### Partie A. Probabilités conditionnelles

- $P(L \cap S) = 0,165$
- $P(L \cup S) = P(L) + P(S) - P(L \cap S) = 0,34 + 0,30 - 0,165 = 0,475$
- $P_S(L) = \frac{P(L \cap S)}{P(S)} = \frac{0,165}{0,30} = 0,55$  (déjà placé dans l'arbre dans la question 5)
- $P_S(L) = 0,55$  est différent de  $P(L) = 0,34$  donc les événements  $L$  et  $S$  ne sont pas indépendants.

Ou car :  $P(L) \times P(S) = 0,34 \times 0,30 = 0,102 \neq P(L \cap S)$

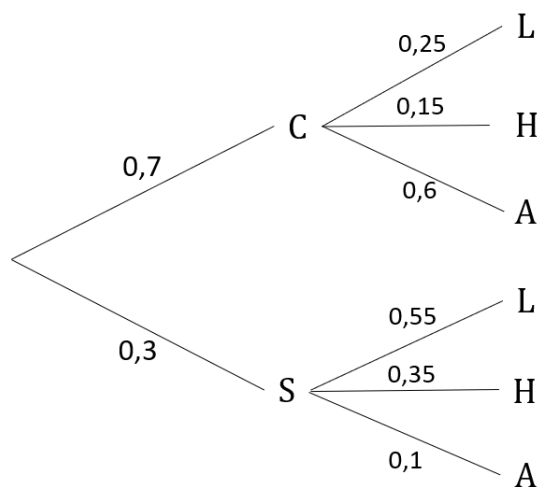
- Déterminons les probabilités conditionnelles :

$$P_C(L) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{0,175}{0,70} = \frac{17,5}{70} = 0,25$$

$$P_C(H) = \frac{P(H \cap C)}{P(C)} = \frac{10,5}{70} = 0,15 \text{ (déjà placé dans l'arbre)}$$

$$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{42}{70} = 0,6 \text{ puis } P_S(H) = \frac{10,5}{30} = 0,35 \text{ et } P_S(A) = \frac{3}{30} = 0,1$$

L'arbre complet :



### Partie B. Loi binomiale

- La variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 90$  et  $p = 0,62$

Son espérance est :  $E(X) = np = 90 \times 0,62 = 55,8$

- $P(X = 55) \approx 0,085$

- 50% des 90 clients correspond à 45 clients,  
et la probabilité qu'il y ait au moins 45 clients retraités est :

$$P(X \geq 45) = 1 - P(X \leq 44) \approx 1 - 0,008 \approx 0,992$$

(ou directement avec la calculatrice NumWorks)

### Partie C. Loi normale

1.  $\mu = 100\,000$  (C'est l'abscisse du maximum de la courbe)
2.  $P(70\,000 \leq Z \leq 130\,000) = P(100\,000 - 30\,000 \leq Z \leq 100\,000 + 30\,000) = 0,95$   
Et on sait que :  $P(100\,000 - 2\sigma \leq Z \leq 100\,000 + 2\sigma) \approx 0,95$   
On en déduit :  $2\sigma \approx 30\,000$  et finalement  $\sigma \approx \frac{30\,000}{2}$  donc  $\sigma \approx 15\,000$
3.  $P(Z \geq 80\,000) \approx 0,909$
4. Si le chiffre d'affaires de l'opticien augmente de 30%, il serait égal à :  
 $80\,000 \times (1 + \frac{30}{100}) = 104\,000$  euros.  
L'opticien embauche si son chiffre d'affaires est de 104 000 euros (ou plus).  
  
Et  $P(Z \geq 104\,000) \approx 0,395$ .  
La probabilité que l'opticien embauche un nouvel employé est donc d'environ 0,395.

### Partie D. Test d'hypothèse

1. Sous l'hypothèse nulle, la variable aléatoire  $F$  suit la loi normale d'espérance  $p = 0,55$  et d'écart type  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,55(1-0,55)}{130}} \approx 0,044$
2.  $h = 2 \times 0,044 \approx 0,088$
3.
  - On a donc  $P(0,55 - 0,088 \leq F \leq 0,55 + 0,088) = 0,95$   
donc  $P(0,462 \leq F \leq 0,638) = 0,95$
  - Énonçons la règle de décision de ce test :

On prend un échantillon de 130 clients et on calcule la fréquence  $f$  de clients qui sont venus en voiture.

Si  $f \in [0,462 ; 0,638]$  alors on accepte  $H_0$

Sinon on rejette  $H_0$  au seuil de 5%

- Utilisation du test avec l'échantillon :  $f = \frac{88}{130} \approx 0,677$

$0,677 \notin [0,462 ; 0,638]$  donc, au seuil de 5%, on rejette  $H_0$ .

On peut donc conclure que, contrairement à ce que dit l'opticien, la proportion de ses clients qui viennent en voiture n'est pas égale à 55%.