

BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

SESSION 2023

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Corrigé proposé par M. DESHAYES, professeur de mathématiques à

l'institut et campus d'optique de Bures-sur-Yvette.



EXERCICE 1

Partie A – Étude d'une série statistique

1) Un ajustement affine de N en t n'est pas approprié car les points du graphique ne sont pas proches d'une droite.

2) a) $r \approx -0,989$

b) L'ajustement affine de z en t est justifié car le coefficient de corrélation linéaire de la série (t, z) est proche de -1.

3) $z = -0,80t + 4,83$

4) $z = \ln(415 - N) = -0,80t + 4,83$

$$415 - N = e^{-0,80t + 4,83}$$

$$N = 415 - e^{-0,80t + 4,83}$$

$$N = 415 - e^{4,83} \times e^{-0,80t}$$

$$N \text{ est de la forme } N = 415 - Ce^{-0,8t} \text{ avec } C = e^{4,83} \approx 125$$

On a finalement : $N = 415 - 125e^{-0,8t}$

5) En 2023, $t = 6$ donc $N = 415 - 125e^{-0,80 \times 6} \approx 414$

Le nombre de montures vendues sera de 414 en 2023.



Partie B – Résolution d'une équation différentielle

1) Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions f définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = k e^{-\frac{4}{5}t} = k e^{-0,8t}$ où $k \in \mathbb{R}$

2) * La fonction g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $g'(t) = 0$

* La fonction g est solution de l'équation différentielle (E) donc

$$5g'(t) + 4g(t) = 1660, \text{ pour tout } t \text{ de } [0 ; +\infty[$$

$$0 + 4c = 1660$$

$$\text{Donc } c = \frac{1660}{4} = 415$$

3) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = k e^{-0,8t} + g(t) = k e^{-0,8t} + 415$ où $k \in \mathbb{R}$

4) $f(0) = 290$

$$k e^0 + 415 = 290$$

$$k = 290 - 415 = -125$$

Conclusion : La fonction f recherchée est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = -125 e^{-0,8t} + 415.$$

Partie C – Étude d'une fonction

1) La ligne 3 du logiciel de calcul formel fournit la limite de f en $+\infty$, on en déduit que :

- La courbe Cf admet, en $+\infty$, une asymptote d'équation $y = 415$.
- À long terme, le nombre de montures vendues de ce modèle sera égal à 415 par an.

2) La ligne 1 du logiciel donne une expression de la dérivée de la fonction f :

$$f'(t) = 100 e^{-\frac{4}{5}t}$$

$$e^{-\frac{4}{5}t} > 0, \text{ pour tout } t \text{ de } [0 ; +\infty[\text{ donc } f'(t) > 0, \text{ pour tout } t \text{ de } [0 ; +\infty[$$

donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3) La situation 2



Partie D – Étude d'une suite

1) $U_1 = 0,9 U_0 + 50 = 0,9 \times 3000 + 500 = 3200$

Donc 3200 clients en 2018

2) $V_{n+1} = U_{n+1} - 5000 = 0,9 U_n + 500 - 5000 = 0,9 U_n - 4500$

Avec $V_n = U_n - 5000$ donc avec $U_n = V_n + 5000$

$V_{n+1} = 0,9 (V_n + 5000) - 4500 = 0,9 V_n + 4500 - 4500$

On obtient : $V_{n+1} = 0,9 V_n$, pour tout entier n , donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

3) $V_n = V_0 q^n = (U_0 - 5000) \times 0,9^n = -2000 \times 0,9^n$ pour tout entier naturel n .

4) $U_n = V_n + 5000 = 5000 - 2000 \times 0,9^n$; pour tout entier naturel n .

5) $n = 6$ en 2023

$U_6 = 5000 - 2000 \times 0,9^6 \approx 3937$ donc 3937 clients en 2023

6)

- La valeur de la variable n après l'exécution de cet algorithme est 8 car :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u	3000	3200	3380	3542	3687,8	3819,02	3937,118	4043,4062

- Interprétation : si 3000 clients en 2017 et 3200 en 2018

année	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
n	1	2	3	4	5	6	7	8
u	3000	3200	3380	3542	3687,8	3819,02	3937,118	4043,4062

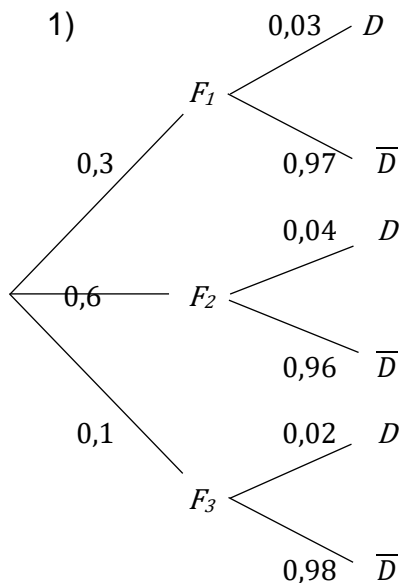
À partir de l'année 2024, le nombre de clients de l'entreprise est supérieur à 4000.

Remarque : si l'algorithme commençait par $n \leftarrow 0$ (pour l'année 2017) alors la valeur de la variable n après l'exécution de cet algorithme est 7 et l'interprétation est la même.



EXERCICE 2

Partie A. Probabilités conditionnelles



$$1) P(F_1 \cap D) = 0,3 \times 0,03 = 0,009$$

$$2) P(D) = 0,009 + 0,6 \times 0,04 + 0,1 \times 0,02 = 0,009 + 0,024 + 0,002 = 0,035$$

$$3) P_{D(F_1)} = \frac{P(F_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,009}{0,035} \approx 0,257$$

Partie B. Loi binomiale et loi normale

1) a) La variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,035$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(6 \leq X \leq 10) &= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &\approx 0,15090 + 0,15168 + 0,13272 + 0,10269 + 0,07114 \approx 0,609 \end{aligned}$$

Ou plus rapidement :

$$P(6 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 5) \approx 0,9053 - 0,2962 \approx 0,609$$

Ou directement $P(6 \leq X \leq 10) \approx 0,609$ avec la calculatrice NUMWORKS

2) a) espérance : $np = 200 \times 0,035 = 7$
écart type : $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \times 0,035 \times (1 - 0,035)} \approx 2,599$

$$\text{b) } P(5,5 \leq Y \leq 10,5) \approx 0,629$$

Interprétation : c'est une valeur approchée de la probabilité

$P(6 \leq X \leq 10)$, c'est-à-dire la probabilité que le nombre de verres semi-finis défectueux au sein de l'échantillon soit compris au sens large entre 6 et 10.



Partie C. Loi exponentielle

$$1) E(T) = \frac{1}{0,2} = 5$$

Sur un grand nombre d'appels, le temps d'attente est proche de 5 minutes

$$2) P(2 \leq T \leq 4) = e^{-0,2 \times 2} - e^{-0,2 \times 4} \approx 0,221$$

Partie D. Estimation

$$1) f = \frac{80}{100} = 0,8$$

$$2) \text{ L'intervalle de confiance est : } \left[f - 1,65 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + 1,65 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

$$\text{Ce qui donne } \left[0,8 - 1,65 \sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{100}} ; 0,8 + 1,65 \sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{100}} \right]$$

$$\left[0,8 - 1,65 \sqrt{\frac{0,16}{100}} ; 0,8 + 1,65 \sqrt{\frac{0,16}{100}} \right]$$

$$\left[0,8 - 0,066 ; 0,8 + 0,066 \right]$$

L'intervalle de confiance recherché est : $[0,734 ; 0,866]$

$$3) 1,65 \sqrt{\frac{0,16}{n}} \leq 0,03$$

$$\sqrt{\frac{0,16}{n}} \leq \frac{0,03}{1,65}$$

$$\frac{0,16}{n} \leq \left(\frac{0,03}{1,65}\right)^2$$

$$\frac{0,16}{\left(\frac{0,03}{1,65}\right)^2} \leq n$$

$$n \geq 484$$

Interprétation :

Avec un échantillon d'au moins 484 clients sur lequel on obtiendrait une estimation ponctuelle de 0,8 et avec le même coefficient de confiance, l'intervalle de confiance serait alors $[0,8 - 0,03 ; 0,8 + 0,03]$.

484 est la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,06 ou une estimation avec une marge d'erreur de 0,03.

