BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

SESSION 2022

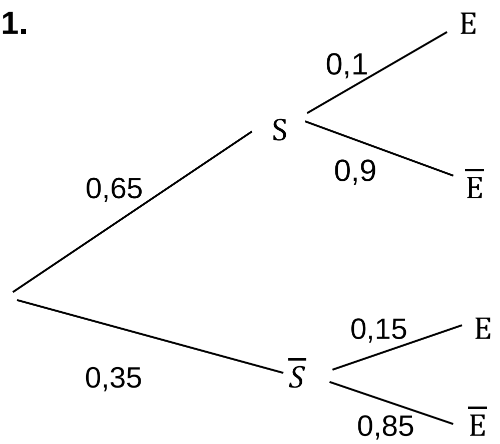
Note : ce corrigé n’a pas de valeur officielle et n’est donné qu’à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Corrigé proposé par M. DESHAYES, professeur de mathématiques de l’Institut et Centre d’Optométrie de Bures-sur-Yvette.

EXERCICE 1

PARTIE A

1.



2. $P(S \cap E) = 0{,}65 \times 0{,}1 = 0{,}065$

3. $P(E) = 0{,}065 + 0{,}35 \times 0{,}15 = 0{,}065 + 0{,}0525 = 0{,}1175$

4. $P_E(S) = \dfrac{P(S \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}065}{0{,}1175} = \dfrac{650}{1175} = \dfrac{26}{47} \approx 0{,}5532$ (à 10^{-4})

PARTIE B

1.

	Courbe correspondante	Paramètres
Mardi, Jeudi	C_1	λ = 0,5
Mercredi, Vendredi	C_3	a = 0 b = 8
Samedi	C_2	m = 6 σ = 1

2. Mardi : loi exponentielle T d'espérance E(T) $= \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,5} = 2$

Donc sur une longue période, le temps d'attente moyen est proche de 2 minutes.

3. Mercredi : loi uniforme T' sur [0 ; 8]

$P(T' < 6) = P(0 \leq T' \leq 6) = \frac{6-0}{8-0} = 0,75$

La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 6 minutes est égale à 0,75.

4. Samedi : loi normale T'' de moyenne 6 et d'écart type 1

$P(4 \leq T'' \leq 8) \approx 0,954$ (obtenu à la calculatrice)

La probabilité que le temps d'attente soit compris entre 4 et 8 minutes est d'environ $0,954$.

PARTIE C

1. $u_1 = u_0 \times (1 + \frac{12}{100}) = 50 \times 1,12 = 56$

2. $u_2 = u_1 \times 1,12 = 56 \times 1,12 = 62,75 \approx 63$

Durant l'année 2012, le nombre d'appareils auditifs vendus est égal à 63.

3. $u_{n+1} = u_n \times 1,12$, pour tout entier naturel n, donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,12$

4. a) Avec un tableau de valeurs des termes de la suite (u_n), qui est croissante :

n	u_n arrondi à l'unité
12	195
13	218

Donc $n \geq 13$

b) Avec l'expression de u_n en fonction de n et en résolvant cette inéquation :

$u_n > 200$

$50 \times 1{,}12^n > 200$

$1{,}12^n > 200/50$

$\ln(1{,}12^n) > \ln(4)$

$n \ln(1{,}12) > \ln(4)$

$n > \frac{\ln(4)}{\ln(1{,}12)}$ avec $\frac{\ln(4)}{\ln(1{,}12)} \approx 12{,}2$

$n \geq 13$

Interprétation :

Le nombre d'appareils vendus annuellement dépasse 200 durant l'année 2023.

PARTIE D

1. $f = \frac{45}{200} = 0{,}225$

2. L'intervalle de confiance est : $\left[f - 2\sqrt{\frac{f(1-f)}{200}}\ ;\ f + 2\sqrt{\frac{f(1-f)}{200}}\right]$

Avec : $f = 0{,}225$

$$\left[0{,}225 - 2\sqrt{\frac{0{,}225 \times (1 - 0{,}225)}{200}}\ ;\ 0{,}225 + 2\sqrt{\frac{0{,}225 \times (1 - 0{,}225)}{200}}\right]$$

L'intervalle de confiance de p avec le niveau de confiance de 95%

est : $[0{,}165\ ;\ 0{,}285]$

(Borne inférieure arrondie par défaut et borne supérieure par excès)

3. Non, la proportion p n'appartient pas de façon certaine à cet intervalle.
Le niveau de confiance de 95% signifie qu'environ 95% des intervalles qu'on peut obtenir ainsi contiennent la proportion p.

EXERCICE 2

PARTIE A

1. Un ajustement affine de N en t ne semble pas approprié car les points ne sont pas proches d'une droite.

2. a) $z = -0{,}120\, t + 6{,}428$

b) $z = \ln(N - 375) = -0{,}120\, t + 6{,}428$

$N - 375 = \mathrm{e}^{-0{,}12\,\mathrm{t} + 6{,}428}$

$N = \mathrm{e}^{-0{,}12\,\mathrm{t} + 6{,}428} + 375$

$N = \mathrm{e}^{-0{,}12\,\mathrm{t}}\ \mathrm{e}^{6{,}428} + 375$

$N =$ A $\mathrm{e}^{-0{,}12\,\mathrm{t}} + 375$ avec $\mathrm{A} = \mathrm{e}^{6{,}428} \approx 619$

PARTIE B

1. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions f définies sur $[0\,;+\infty\,[$ par $f(t) = k\, e^{-\frac{0{,}24}{2}t} = k\, e^{-0{,}12\, t}\ ;\ k \in \mathbb{R}$

2. a) La fonction g est dérivable sur $[0\,;+\infty\,[$ et $g'(t) = 0$

$2\,g'(t) + 0{,}24\,g(t) = 0 + 0{,}24 \times 375 = 90$, pour tout t de $[0\,;+\infty\,[$

donc la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

b) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur $[0\,;+\infty\,[$ par $f(t) = k\, e^{-0{,}12t} + 375$

3. $f(0) = 994$

$k\, e^{-0{,}12 \times 0} + 375 = 994$

$k + 375 = 994$

$k = 994 - 375 = 619$

Conclusion : la solution f vérifiant la condition initiale est définie sur $[0\,;+\infty\,[$

par $f(t) = 619\, e^{-0{,}12\, t} + 375$

PARTIE C

1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(t) = 0+619 \times (-0{,}12)e^{-0{,}12\,t}$
   donc $f'(t) = -74{,}28\, e^{-0{,}12\,t}$

2. L'exponentielle étant strictement positive, on a :

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$
Variation de f	$\searrow$

3. $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}12\,t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 375$
   On en déduit que la courbe C admet, en $+\infty$, une asymptote d'équation $y = 375$.

4. $y = 994 - 74{,}28\,t$