Corrigé du BTSOL
Epreuve de Mathématiques

Peggy VINET
ISO Lyon

Attention : Ces corrigés n'ont pas valeur de correction officielle. En aucun cas ils ne constituent le cadre de référence des correcteurs.

1er EXERCICE

Partie A

Tracés sur les annexes 1 et 3 des 6 points et de la courbe d'ajustement.

Partie B

On pose $z_i = \ln y_i$ ($1 \leq i \leq 6$)

1) Placer, sur l'annexe 2, les points :

N1(0;ln2)
N2(1;ln3)
N3(2;ln9)
N4(3;ln20)
N5(4;ln36)
N6(5;ln55)

2) L'équation de la droite d'ajustement du nuage des points N_i ($1 \leq i \leq 6$) par la méthode des moindres carrés est : z = 0,709t + 0,656

3) Expression de y en fonction de t
On a : z = 0,709t + 0,656
Or z = ln y
D'où : ln y = 0,709t + 0,656
$y=e^{0,709t + 0,656}$; $y=e^{0,656} \times e^{0,709t}$

($\alpha = e^{0,656}$ et $\beta = 0,709$)

4) La tendance traduite par la courbe E (dont une équation est donnée par : $y = e^{0,656} . e^{0,709t}$) se maintiendra pendant l'année 99. La fin de l'année 99 correspond au rang 7, soit à t7=6.

On obtient donc en utilisant l'équation de la courbe d'ajustement vue précédemment : $y = e^{0,656} \times e^{0,709 \times 6} = 135,7$

Le pourcentage prévisionnel de ménages équipés du nouveau produit à la fin de l'année 1999 est 135%.

Ce résultat n'est pas acceptable.

Partie C

1) Soit f définie sur [o;+ ∞ [par $f(t) = \dfrac{100}{1+49e^{-0,8t}}$

1.1)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(t)	2	4	9	18	33	53	71	85	92	96	98

1.2) Limites de f(t) quand t tend vers + ∞ :
$e^{-0,8t} \rightarrow 0$
$1 + 49e^{-0,8t} \rightarrow 1$
d'où $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 100$

1.3) Sens de variation de f :
On a $f'(x) = \dfrac{3920e^{-0,8t}}{\left(1+49e^{-0,8t}\right)^2}$
Donc, sur [0;+ ∞ [, la fonction f est croissante.

2) 2.1)

- On a vu que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 100$

Ceci prouve que la droite d'équation y=100 est asymptote horizontale à la courbe C .

- Abscisse du point I de C d'ordonnée 50

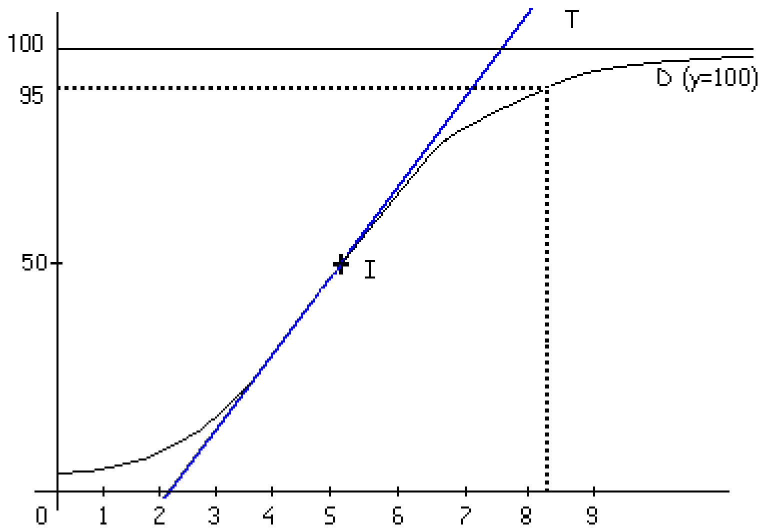
On a : $f(t_I) = 50$

$\Leftrightarrow \dfrac{100}{1+49e^{-0,8t}} = 50$

$\Leftrightarrow t_I = \dfrac{\ln 49}{0,8} = \dfrac{\ln 7}{0,4} \approx 4,865$

- Coefficient directeur de la tangente T à C au point I.

Le coefficient est : $f'(t_I) = 20$.



3) 3.1) Graphiquement, on obtient : [8,5;+ ∞ [

3.2) Par le calcul : f(t)$\geq$ 95

100 ln931

$$\Leftrightarrow \frac{100}{1+49e^{-0,8t}} \geq 95$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 931}{0,8}$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est : $\left[\frac{10\ln 931}{8};+\infty\right[$

4) 4.1) $f(t) = \frac{100}{1+49e^{-0,8t}}$ $\forall$ t $\in$ [0,+ ∞ [

$$f(t) = \frac{100e^{0,8t}}{\left(1+49e^{-0,8t}\right)e^{0,8t}} = \frac{100e^{0,8t}}{49+e^{0,8t}}$$ CQFD

Primitive de f : $F(t) = 125\frac{0,8e^{0,8t}}{49+e^{0,8t}}$ (du type $\frac{u'}{u}$)

Donc une primitive de f est :

$$F(t) = 125\ln\left(49+e^{0,8t}\right)$$

4.2) Valeur moyenne de f sur [0,3], notée m :

$$m = \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)dt = \frac{1}{3}\left(F(3)-F(0)\right) = \frac{125}{3}\left[\ln\left(49+e^{2,4}\right)-\ln(50)\right] \approx 7,613$$

2ème EXERCICE

Partie A

1) Il s'agit d'une loi binomiale de paramètres n=50 et p=0,1 (donc q=1-p=0,9)

Espérance mathématique de x: E(x)=np=5

Variance de x: V(x)=npq=4,5

2) 2.1) L'événement considéré est : "x$\geq$3"

Ainsi P(x$\geq$3) =1-P(X<3) =1-[P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)] = 0,875

2.2) Il doit avoir au minimum 8 appareils photographiques en stock pour satisfaire sa clientèle 9 fois 10.

Partie B

1) Dans l'échantillon, il y a 60% des clients qui sont acheteurs.

1.1) Estimation ponctuelle de p: p=0,6

1.2) Intervalle de confiance au risque de 5%

$$I = \left[f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}} ; f + \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}} \right]$$

où :

- n est la taille de l'échantillon (n=100)
- f le pourcentage de clients acheteurs (f=0,6)
- t est tel que 2 π

(t)-1 soit égal au coefficient de confiance (95%)

Résolvons 2π (t)-1=0,95 $\Leftrightarrow$ π (t)=0,975

D'où t=1,96

On obtient donc : I=[0,5035;0,6965]

2) L'intervalle de confiance 90% est [0,557;0,643].

Pour déterminer n, il faut résoudre :

$$f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}} = 0{,}557$$ avec 2π (t)-1=0,9 ; soit t =1,645

$\Leftrightarrow$ $0{,}6 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}24}{n-1}} = 0{,}557$

$\Leftrightarrow$ n=352,24

Il faut donc un échantillon de 353 personnes.