CORRIGE DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BTSOL 2000

Peggy VINET
ISO LYON

Attention : Ces corrigés n'ont pas valeur de correction officielle. En aucun cas ils ne constituent le cadre de référence des correcteurs.

Exercice 1

Partie A

1) P1 = P ($108,5 \leq L \leq 111,5$) Soit $T = \frac{L-110}{1}$ la variable aléatoire associée à L.
P1 = P ($-1,5 \leq T \leq 1,5$)
= 2π (1,5) - 1
= 0,8664

2) P2 = P ($D \geq 1,8$) Soit $T' = \frac{D-2}{0.1}$ la variable aléatoire associée à D.
P2 = P ($T' \geq -2$)
= π (2)
= 0,9772

3) Soit A l'événement : "la longueur est correcte"
Soit B l'événement : "le diamètre est correct"
P3 = 1 – P ($A \cap B$)
= 1 – P [($108,5 \leq L \leq 111,5$) $\cap$ ($D \geq 1,8$)]
Les variables L et D étant indépendantes, on a :
P3 = 1-P ($108,5 \leq L \leq 111,5$) x P ($-D \geq 1,8$)
= 1-0,8664 x 0,9772 = **0,1534**

Partie B

1) m = 110,1
(sigma)σ = 0,980

2) Par estimation ponctuelle, μ = 110,1

3) L'intervalle de confiance de la moyenne des longueurs des pièces avec le coefficient de confiance 0,9 est : **[109,867 ; 110,333]**

Exercice 2

I) Étude d'une fonction auxiliaire

1)

$$g'(x) = \frac{3xe^{5-0,01x} + 3(x+100)(-0,01e^{5-0,01x})}{10^4} + \frac{2}{3(3x - 1500x)}{2.10^7}$$

$$= \frac{-3.10^{-2}xe^{5-0,01x}}{10^4} + \frac{9x(x-500)}{2.10^7}$$

$$= -\frac{3xe^{5-0,01x}}{10^6} + \frac{9x(x-500)}{2.10^7} \quad \textbf{CQFD}$$

$$g''(x) = \frac{3e^{5-0,01x} - 0,03xe^{5-0,01x}}{10^6} + \frac{18x - 4500}{2.10^7}$$

$$= \frac{3(x-100)e^{5-0,01x}}{10^8} + \frac{9(x-250)}{10^7} \quad \textbf{CQFD}$$

2) Sur $[500;1000]$ $x-100 > 0$

$e^{5-0,01x} > 0$

donc $(x-100)e^{5-0,01x} > 0$

Sur [500;1000] x-250 > 0

Donc g"(x) > 0 sur [500 ; 1000] (comme somme de fonctions positives).

3)

a) On a vu que g"(x) > 0 sur [500 ; 1000]
La fonction g' est donc croissante sur cet intervalle.

b) $g'(500) = -1,5.10^{-3}$
$g'(1000) = 225.10^{-3} - 3e^{-3}$ = **0,225 env**

c) La fonction g' est continue et dérivable sur [500 ; 1000] et strictement croissante.
g' réalise donc une bijection de [500 ; 1000] sur [g(500) ; g(1000)].

Or, g(500) < 0 et g(1000) > 0, l'élément 0 appartient à
[g(500) ; g(1000)]

Il y a donc un antécédent unique dans [500 ; 1000]. L'équation g'(x) = 0 admet une unique solution sur [500 ; 1000] notée α

d)

x	500		α		1000
Signe de g'		-	0	+	
Variation de g	g(500) ↘		g(α)	↗	g(1000)

4)

a) g(500) = -14,82 et g est décroissante sur [500 ; α] donc g(α) < 0

b) g(1000) = $(33e^{-5} + 3187{,}5)\,10^{-2} > 0$

c) Sur [500 ; α] g(x) $\leq$ 0.
L'équation g(x) = 0 n'a donc pas de solution.

Sur [α ; 1000] la fonction est continue à valeurs dans [g(α) ; g(1000)] (car g est croissante).

Elle réalise donc une bijection de [α ; 1000] sur [g(α) ; g(1000)].
Or g(α) < 0 et g(1000) > 0 ; l'élément 0 admet donc un antécédent unique dans [α ; 1000].

L'équation g(x) = 0 admet une solution unique notée β .

d) Sur [500 ; β] g(x) $\leq$ 0
Sur [β ; 1000] g(x) $\geq$ 0.

II) Recherche du minimum d'une fonction

1) $f'(x) = 2{,}25.10^{-7}\,(x-500)^2 + 3.10^{-4}\,e^{5-0{,}01x}$
Sur [500 ; 1000] f'(x) > 0.
La fonction f est donc croissante sur cet intervalle.

2) Graphe

3) Le coefficient directeur de (0M) est $\frac{f(x)}{x}$
4)

a) $p(x) = \frac{f(x)}{x}$

$$\text{d'où } p'(x) = \frac{f'(x).x - f(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) Le signe de p' est celui de g

d'où
$p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \beta$
$p'(x) > 0 \Leftrightarrow 500 < x < \beta$
$p'(x) > 0 \Leftrightarrow \beta < x < 1000$.

Ainsi p est croissante sur [β ; 1000] et décroissante sur [500 ; β].
p(β) est donc le minimum de la fonction p.

5)

a) Une valeur approchée de β est 800 (obtenue graphiquement)
b) β = 807 (par dichotomie en sachant que β a pour valeur approchée 800)

6)

Le coefficient de la droite (OA) est $\dfrac{f(\beta)}{\beta}$

or $\dfrac{f(\beta)}{\beta} = f'(\beta)$

donc (OA) tangente à C au point A.

III) Application

On a $\dfrac{C(q)}{q} = p(q)$

On a vu que p(q) est minimum pour $q_0 = 807$ et est décroissante sur $[500 ; q_0]$ et croissante sur $[q_0 ;1000]$.
Il est donc possible d'augmenter la production en diminuant (et minimisant) le coût moyen par article (jusqu'à 807 articles).

IV) Calcul d'intégrale

1) $F(x) = \dfrac{7{,}5.10^{-8}}{4}(x-500)^4 + 3e^{5-0{,}01x} + 15x + \text{constante}$

2) $\displaystyle\int_{500}^{1000} f(x)\,dx = [F(x)]_{500}^{1000}$

$= F(1000) - F(500)$

$= 3e^{-5} + \dfrac{69351}{8}$

= 8669 environ