Corrigé du BTSOL 2001
CORRIGE DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Peggy Vinet Iso Lyon

Attention : Ces corrigés n'ont pas valeur de correction officielle. En aucun cas ils ne constituent le cadre de référence des correcteurs.

EXERCICE I :

PARTIE A

1. Les solutions de (E') sont

$$y'_E = Ce^{-\frac{3}{4}x} \quad (C \in \Re)$$

2. La fonction g est solution de (E)
On a donc

$$g'(x) + \frac{3}{4}g(x) = \frac{9x+3}{16}$$

Or

$$g(n) = ax + b \qquad g'(x) = a$$

Ainsi

$$a + \frac{3}{4}(ax+b) = \frac{9x+3}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}ax + a + \frac{3}{4}b = \frac{9x+3}{16}$$

On obtient par identification

$$\frac{3}{4}a = \frac{9}{16}$$

$$a + \frac{3}{4}b = \frac{3}{16}$$

Soit

$$a = \frac{3}{4} \qquad b = -\frac{3}{4}$$

Donc

$$g(x) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

3. Les solutions de (E) sont

$y_E = Ce^{-\frac{3}{4}x} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

4.

$f(o) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow Ce^0 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow C = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow C = 1$

D'où

$f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + e^{-\frac{3}{4}x}$

PARTIE B

1.

a) $f'(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}x}$

b) Signe de f'(x)

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}x} \geq 0$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{3}{4}x} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

La fonction f est croissante sur [0,+00[

2.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On a

$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\right)\right]$

$\lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{3}{4}x} = 0$

La droite d'équation

$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

est asymptote oblique à C

De plus,

$$f(x)-\left(\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)=e^{-\frac{3}{4}x}\geq 0 \quad (\forall x\in \Re)$$

La courbe C est au-dessus de l'asymptote D

3.

a)

$$Y_M-Y_N=f(x)-\left(\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)$$

Car

$$M(x,f(x)) \quad et \quad N\left(x,\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)$$

Ainsi

$$Y_M-Y_N=e^{-\frac{3}{4}x}$$

$$Y_M-Y_N\leq 0.05 \Leftrightarrow e^{-\frac{3}{4}x}\leq 0.05$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}x\leq \ln 0.05 \Leftrightarrow x\geq -\frac{4}{3}\ln 0.05$$

Le plus petit x pour lequel Y_M-Y_N est

$$x_0=-\frac{4}{3}\ln 0.05\approx 4$$

valeur arrondie à l'unité

b) Représentation graphique

4.

a)

$$\int_0^3 e^{-\frac{3}{4}x}dx=\left[-\frac{4}{3}e^{-\frac{4}{3}x}\right]_0^3=\frac{4}{3}\left(1-e^{-\frac{9}{4}}\right)$$

b)

$$A=4\int_0^3\left[f(x)-\left(\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)\right]dx$$

$$=4\int_0^3 e^{-\frac{3}{4}x}dx=\frac{16}{3}\left(1-e^{\frac{9}{4}}\right)=4.77cm^2$$

EXERCICE II :

PARTIE A

1.

a=

$$p_1 = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$$

$$p_2 = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

2.

a) X suit la loi binomiale B(36,1/24)

Espérance E(X) = 36 x 1/24 = 1.5
Variance V(X) = 36 x 1/24 x (1 - 1/24) = 1.4375

Ecart-Type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1.2$$

b) Y suit la loi binomiale B(36,1/2)

Espérance E(Y) = 36 x 1/2 = 18
Variance V(Y) = 36 x 1/2 x 1/2 = 9

Ecart-Type

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = 3$$

3. X1 suit la loi de Poisson de paramètre 1.5

$P(X_1 >= 3) = 1 - P(X_1 < 3)$
$=1 - (P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) + P(X_1 = 2))$
=1 - (0.223 + 0.335 + 0.251)
=0.19

4. Y1 suit la loi normale N(18,3)

Soit

$$T = \frac{Y - 18}{3}$$

la variable aléatoire associée à Y_1 suivant la loi normale N(0,1)

Ainsi $P(14.5 =< Y_1 =< 21.5)$

$$= P\left(\frac{14.5 - 18}{3} \leq T \leq \frac{21.5 - 18}{3}\right)$$

= P (-1.17 =< T =< 1.17)
= 2 pi (1.17) -1
= 2 x 0.8797 - 1
= 0.76

PARTIE B

1. La variable Ƶ suit la loi

$$N(m, \frac{30}{\sqrt{100}})$$

Sous l'hypothèse H_0 , m = 120

Ƶ suit donc la loi normale de moyenne 120 et d'écart-type 3

2. P(120 - h =< Ƶ =< 120 + h) = 0.95

Soit

$$T = \frac{\overline{Z} - 120}{3}$$

la variable associée à Ƶ suivant la loi normale de moyenne 1 et d'écart-type 0

On a P(120 - h =< Ƶ =< 120 + h)

$$P\left(-\frac{h}{3} \leq T \leq \frac{h}{3}\right) = 2\Pi\left(\frac{h}{3}\right) - 1$$

Donc

$$2\Pi\left(\frac{h}{3}\right) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{3}\right) = 0.975$$

D'après la table on obtient

$$\Pi(1.96) = 0.975$$

D'où

$$\frac{h}{3} = 1.96 \Leftrightarrow h = 5.88$$

3. Règle de décision

On prélève de manière aléatoire et avec remise un échantillon de taille n = 100 et on calcule le montant moyen Ƶ sur cet échantillon.

Si Ƶ appartient à la région d'acceptation R_0 on accepte l'hypothèse nulle H_0

Sinon on rejette H_0

(Rq : R_0 = [114.12 , 125.88])

4. A partir de cet échantillon Ƶ = 125
125 appartient à R_0 : H_0 est accepté

Au seuil de 5%, on accepte l'affirmation du comptable.