Corrigé du BTSOL 2002
CORRIGE DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Attention : Ces corrigés n'ont pas valeur de correction officielle. En aucun cas ils ne constituent le cadre de référence des correcteurs.

Exercice 1

Partie A

1) Limites de f en +oo et -oo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) = 1$$

$$car \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 - x^2 e^{-x}) = -\infty$$

$$car \quad \lim_{x \to -\infty} e^{-x} x^2 = +\infty$$

2) f'(x) = xe^{-x} (x-2)

Signe de f'(x)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$x-2$		-		-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	1

3) La fonction f est définie et dérivable sur IR donc sur [-1 ; 0].
De plus, f est strictement croissante sur [-1 ; 0].
Elle réalise donc une bijection de [-1 ; 0] sur [f(-1) ; f(0)].

Or f(-1) <0 et f(0) >0

L'élément 0, appartenant à [f(-1) ; f(0)], admet donc une solution unique dans [-1 ; 0].

L'équation f(x)=0 a une solution unique alpha sur [-1 ; 0].

De plus, f(-0,71) < 0 et f(-0,70) > 0

donc alpha = 0,70 à 10^{-2}.

4) Graphe

Partie B

1) Résolvons 1-f(x) >= 0

1-f(x)>=0
<=> 1 - 1 + $x^2 e^{-x}$ >=0
<=> $x^2 e^{-x}$ >=0

Toujours vrai sur IR

Donc 1-f(x) >=0 pour tout réel x.

2)

$$\int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^\lambda - \int_0^\lambda -2x e^{-x} dx$$

$$= -\lambda^2 e^{-\lambda} + 2\int_0^\lambda x e^{-x} dx$$

$$= -\lambda^2 e^{-\lambda} + 2[-x e^{-x}]_0^\lambda - 2\int_0^\lambda -e^{-x} dx$$

$$= -\lambda^2 e^{-\lambda} - 2\lambda e^{-\lambda} - 2\left(e^{-\lambda} - e^0\right)$$

$$= e^{-\lambda}(-\lambda^2 - 2\lambda - 2) + 2$$

3)

$$A(\lambda) = 4\int_0^\lambda (1 - f(x)) dx$$

$$= 4\int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx$$

$$= 4e^{-\lambda}(-\lambda^2 - 2\lambda - 2) + 8$$

4)

$$\lim_{\lambda \to \infty} A(\lambda) \quad A(\lambda) = 8 \quad car \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = 0$$

<u>Exercice 2</u>

<u>Partie A</u>

1)

a)

$$pa = P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$$

b)
On sait que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

d'ou

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$pb = P(A \cap B) = 0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}25 = 0{,}05$$

c)

A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Or

$$\begin{gathered} P(A)P(B) = 0{,}1 * 0{,}2 = 0{,}02 \\ P(A \cap B) = 0{,}05 \\ donc\ P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \end{gathered}$$

<u>A et B ne sont donc pas indépendants.</u>

2)
La probabilité recherchée est

$$P2 = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

d'où <u>P2=0,25 - 0,05 = 0,2</u>

3)

$$P3 = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}05}{0{,}10} = 0{,}5$$

<u>Partie B</u>

1)
On est en présence d'une succession de 50 épreuves indépendantes (car prélèvement avec remise) aboutissant sur deux issues contraires :

- Succès : la lentille présente au moins un des deux défauts
  - de probabilité p = 0,25
- Echec : la lentille ne présente pas de défaut
  - de probabilité q = 1 - p = 0,75

<u>X suit donc la loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,25.</u>

2)

$$E(X) = np = 50 \times 0{,}25 = 12{,}5$$
$$V(X) = npq = 50 \times 0{,}25 \times 0{,}75 = 9{,}375$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 3{,}0619$$

3)

$$P(X = 12) = C_{50}^{12}(0{,}25)^{12}(0{,}75)^{50-12} = 0{,}1294$$

4)
Y suit N(12,5 ; 3,06)

a) P(11,5 <= Y <= 12,5)

$soit \quad T = \dfrac{Y - 12{,}5}{3{,}06}$ la variable associée à X suivant N(0 ; 1)

$$P(11{,}5 \leq Y \leq 12{,}5) = P\left(-\frac{1}{3{,}06} \leq T \leq 0\right)$$

$$= \pi(0) - \pi\left(-\frac{1}{3{,}06}\right)$$

$$= \pi(0) + \pi(0{,}327) - 1$$

$$= 0{,}5 + 0{,}6281 - 1 = 0{,}1281$$

b)

$$P(12{,}5 - h \leq Y \leq 12{,}5 + h) = 0{,}673$$
$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{h}{3{,}06} \leq \pi \leq \frac{h}{3{,}06}\right) = 0{,}673$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\left(\frac{h}{3{,}06}\right) - 1 = 0{,}673$$

$$\Leftrightarrow \pi\left(\frac{h}{3{,}06}\right) = \frac{1 + 0{,}673}{2} = 0{,}8365$$

D'après la table :

$\pi(0{,}98) = 0{,}8365$

donc

$\frac{h}{3{,}06} = 0{,}98 \ \Leftrightarrow \ h = 2{,}9988$

Soit h = 3