Corrigé du BTSOL 2003
CORRIGE DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Peggy VINET

Attention : Ces corrigés n'ont pas valeur de correction officielle. En aucun cas ils ne constituent le cadre de référence des correcteurs.

Exercice 1

1 a)

$$\lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$$

Par produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) La droite d'équation y=0 est asymptote à C au voisinage de $-\infty$

2 a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)e^{\frac{x}{2}} + (x-1)^2 x \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \\ &= (x-1)e^{\frac{x}{2}}\left[2+\frac{1}{2}(x-1)\right] \\ &= (x-1)e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(x)\right) \\ &= \frac{(x-1)(x+3)}{2}e^{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

b) Le signe de f'(x) ne depend que du signe de

$(x-1)(x+3)$ (car $e^{\frac{x}{2}} > 0$)

Etude du signe

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x-1		−		−	0	+	
x+3		−	0	+		+	
f'(x)		+	0	−	0	+	

$$f'(x) > 0 \quad sur \quad]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$$
$$f'(x) < 0 \quad sur \quad]-3;1[$$
$$f'(x) = 0 \quad si \quad x = -3 \quad ou \quad x = 1$$

c) <u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f			$16e^{3/2}$				$+\infty$
f'(x)	0	↗		↘	0	↗	

$$f(1) = 0$$
$$f(-3) = 16e^{\frac{3}{2}}$$

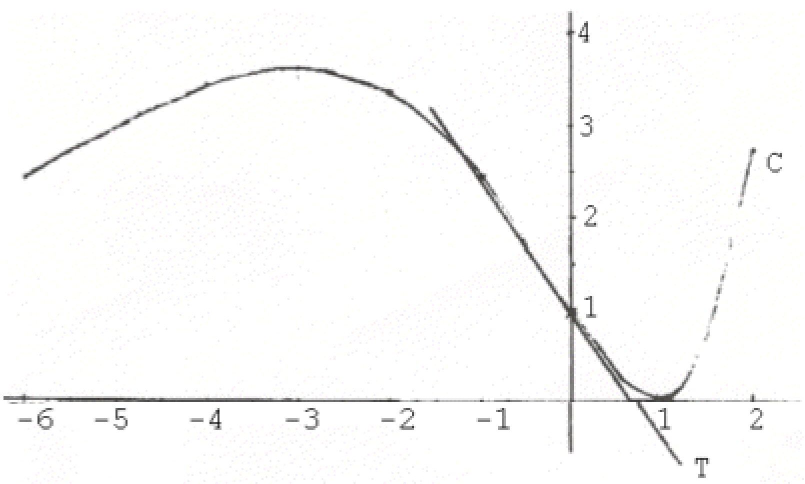
3 a) Equation de la tangente T à C au point d'abscisse 0

$$y - f(0) = f'(0)(x-0)$$
$$(=) \quad y - 1 = -\frac{3}{2}x$$
$$(=) \quad y = -\frac{3}{2}x + 1$$

b)

x	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	2,44	3,38	3,57	3,31	2,43	1	0	2,72

c)



4 a)

$$I = \int_0^1 (x-1) \quad e^{\frac{x}{2}} \quad dx$$

Posons $u = x-1 \quad et \quad v' = e^{\frac{x}{2}}$

On a $u' = 1 \quad et \quad v = 2e^{\frac{x}{2}}$

Ainsi, par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \left[2(x-1)e^{\frac{x}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 2e^{\frac{x}{2}} \quad dx \\ &= 0+2-\left[4e^{\frac{x}{2}} \right]_0^1 \\ &= 2-4e^{\frac{1}{2}}+4 \\ &= 6-4\sqrt{e} \end{aligned}$$

b)

$$J = \int_0^1 (x-1)^2 \quad e^{\frac{x}{2}} \quad dx$$

Posons $u = (x-1)^2 \quad et \quad v' = e^{\frac{x}{2}}$

On a $u' = 2(x-1) \quad et \quad v = 2e^{\frac{x}{2}}$

Ainsi, par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} J &= \left[2(x-1)^2 e^{\frac{x}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 4(x-1)e^{\frac{x}{2}} \quad dx \\ &= 0-2-4I \\ &= 2-4(6-4\sqrt{e}) \\ &= -2-24+16\sqrt{e} \\ &= -26+16\sqrt{e} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^1 f(x)dx \quad (cm^2) \\ A &= 4J \\ A &= 4(16\sqrt{e}-26)cm^2 \\ A &= 1{,}52cm^2 \end{aligned}$$

Exercice 2

Partie A

1) L_1 suit la loi N(130;0,5)

Soit $T = \dfrac{L_1 - 130}{0,5}$ la variable associée à L_1

T suit la loi N(0,1)

$$P(129 \le L_1 \le 131) = P(\frac{129-130}{0,5} \le T \le \frac{131-130}{0,5})$$
$$= P(-2 \le T \le 2)$$
$$= 2\pi(2) - 1$$
$$= 2x0,9772 - 1$$
$$= 0,954$$

2) L_2 suit la loi N(130; σ)

Soit $T' = \dfrac{L_2 - 130}{\sigma}$ la variable associée à L_1

T suit la loi N(0,1)

On a p = 0,03

Or

$$P = 1 - P(129 \le L_2 \le 131)$$
$$= 1 - P(\frac{129-130}{\sigma} \le T' \le \frac{131-130}{\sigma})$$
$$= 1 - P(-\frac{1}{\sigma} \le T' \le \frac{1}{\sigma})$$
$$= 1 - \left[2\pi(\frac{1}{\sigma}) - 1\right]$$
$$= 2 - 2\pi(\frac{1}{\sigma})$$

d'où $2 - 2\pi(\dfrac{1}{\sigma}) = 0,03$

$$\pi(\frac{1}{\sigma}) = 0,985$$

Or $\pi(2,17) = 0,985$

Ce qui montre que $\dfrac{1}{\sigma} = 2,17$

Soit $\sigma = 0,461$

Partie B

1) On est en présence d'une succession de 50 épreuves aléatoires indépendantes (car effectuées avec remise) aboutissant sur deux issus contraires :

- "Succès" : "la face est non conforme" de proba P = 0,04
- "Echec" : "la face est conforme" de proba q = 1-p = 0,96

Suit donc la loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,04

2)

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2)$$
$$= 1 - [P(x = 0) + P(x = 1)]$$

Or $P(x = 0) = C_{50}^{0}\, 0{,}04^{0}\, 0{,}96^{50} = 0{,}96^{50} = 0{,}130$

$P(x = 1) = C_{50}^{1}\, 0{,}04^{1}\, 0{,}96^{49} = 50.0{,}04.0{,}96^{49} = 0{,}271$

Donc $P(x \geq 2) = 0{,}600$

3-a) Le paramètre de la loi de Poisson est

$$\lambda = E(x)$$
$$= np$$
$$= 2$$

b)

$$P(y \leq 4) = P(y = 0) + P(y = 1) + P(y = 2) + P(y = 3) + P(y = 4) = 0{,}947$$

Partie C

Cherchons le réel t tel que $P(-t \leq T \leq t) = 0{,}95$

On a $2\pi(t) - 1 = 0{,}95$

Soit $\pi(t) = 0{,}975$

Ou $t = 1{,}96$ (Par lecture inverse de la table)

Ainsi $P(-1{,}96 \leq T \leq 1{,}96) = 0{,}95$

(=) $P(-1{,}96 \leq \dfrac{\overline{L} - \mu}{\sigma}\sqrt{64} \leq 1{,}96) = 0{,}95$

(=) $P(\overline{L} - 1{,}96\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}} \leq \mu \leq \overline{L} + 1{,}96\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}) = 0{,}95$

Une fois l'échantillon prélevé, on remplace $\overline{L}$ |

Sa valeur observée ($\overline{L}$ =130,088)

L'intervalle de confiance est

$$I = \left[130{,}088 - 1{,}96\frac{0{,}48}{\sqrt{64}} ; 130{,}088 + 1{,}96\frac{0{,}48}{\sqrt{64}}\right]$$
$$I = [129{,}970 ; 130{,}206]$$

1) On choisit comme estimation ponctuelle de la moyenne μ la moyenne de l'échantillon prélevé dans la population, c'est à dire 130,088

2)

Soit $T = \frac{\overline{L} - \mu}{\sigma}\sqrt{64}$ la variable associée à $\overline{L}$

Cherchons le réel t tel que $P(-t \leq T \leq t) = 0{,}95$

On a $2\pi(t) - 1 = 0{,}95$

Soit $\pi(t) = 0{,}975$

Ou $t = 1{,}96$ (Par lecture inverse de la table)

Ainsi $P(-1{,}96 \leq T \leq 1{,}96) = 0{,}95$

$(=) \quad P(-1{,}96 \leq \frac{\overline{L} - \mu}{\sigma}\sqrt{64} \leq 1{,}96) = 0{,}95$

$(=) \quad P(\overline{L} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{64}} \leq \mu \leq \overline{L} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{64}}) = 0{,}95$

3) L'affirmation est fausse, il y a 95% de chance que la moyenne μ soit comprise entre 129,970 et 130,026.