BTS OPTICIEN LUNETIER
Mathématiques
SESSION 2013

Proposition de corrigé par S. El Mouats,
Professeur de Mathématiques à l’Institut Supérieur d’Optique (ISO Paris 15)

Exercice 1 :

Partie A : Statistiques à deux variables :

1. L’allure de la courbe obtenue en reliant les points de ce nuage, ne semble pas être celle d’une droite ; un ajustement affine n’est donc pas approprié.
2. a. $Z = -0{,}82t + 5{,}86$
3. b. $\ln(y - 632) = -0{,}82t + 5{,}86$
   $e^{\ln(y-632)} = e^{-0.82t+5.86}$ car la fonction exp est strictement croissante
   $y - 632 = e^{-0.82t+5.86}$
   $y = e^{-0.82t+5.86} + 632$

Partie B : Résolution d’une équation différentielle :

Soit (E): $1{,}22\, y' + y = 632$.

1. Soit (E_0) : $1{,}22\, y' + y = 0$.
   Les solutions de (E_0) sont de la forme : $k\, e^{-\frac{1}{1{,}22}t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
2. $g(t) = 632$ alors $g'(t) = 0$
   g est solution de (E) si et seulement si : $1{,}22\, g'(t) + g(t) = 632$.
   Or $1{,}22\, g'(t) + g(t) = 0 + 632$
   $= 632$

Donc g est bien solution de (E).

1. $y = k\, e^{-\frac{1}{1{,}22}t} + 632$, avec $k \in \mathbb{R}$.
2. f solution de (E) alors $\mathrm{f(t) = k\, e^{-\frac{1}{1{,}22}t} + 632}$
   Donc, $\mathrm{f(0) = k\, e^0 + 632}$
   Or $(0) = 983$, donc, $983 = \mathrm{k} + 632$
   D’où : $\mathrm{k} = 983 - 632 = 351$

$$f(t) = 351 e^{-\frac{1}{1{,}22}} + 632$$

Partie C : Etude d'une fonction :

$f(t) = 632 + 351e^{-0,82t}$ (on retrouve la solution précédente, en remarquant que

$-\frac{1}{1.22} \approx -0,819 \approx -0,82$

1. a/ f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et

$f'(t) = -0,82 \text{ x } 351\mathrm{e}^{-0,82\mathrm{t}}$; de la forme $e^{u(t)} \rightarrow u'(t)e^{u(t)}$
$= -287,82\ \mathrm{e}^{-0,82\mathrm{t}}$

b/ Signe de $f'(t)$

(Attention ; on vous demande le signe de la dérivée et non pas de résoudre $f'(t) = 0$!!!)

- $- 287,82 < 0$
- $e^{-0,82t} > 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$

Par produit f^' (t)<0 sur [0 ; +∞⫞ [

c/ $f'(t)$ étant négative, f est donc strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. a/ $\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = 632}$ car $\lim_{t\to+\infty} e^{-0,82t} = 0$

b/ $\boxed{y = 632}$ asymptote horizontale à (C).

c/ $T: y = f'(0).(t-0) + f(0)$
Or, $f'(0) = -287,82$ et $f(0) = 632 + 351 = 983$

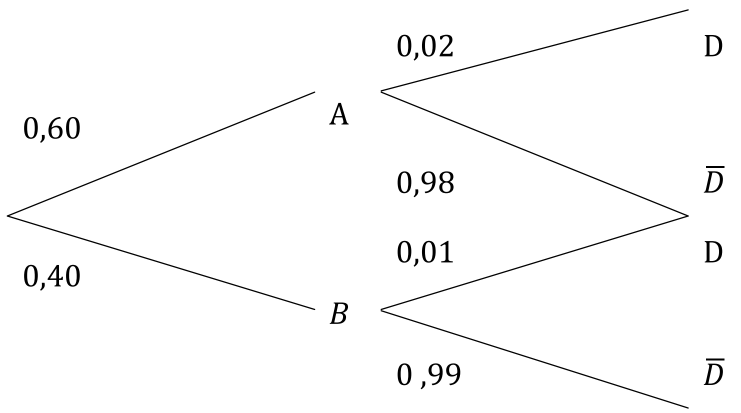
Donc : $\boxed{T: y = -287,82t + 983}$

Remarque : Les calculatrices graphiques type TI N'spire CAS ou TI89 donnent directement cette réponse.

◊ $\boxed{\text{y}}$ → $\boxed{\text{Graphe}}$ › $\boxed{\text{F5}}$ $\boxed{\text{A tangent}}$ › x = 0

Exercice n° 2 :

Partie A : Probabilités conditionnelles :



1. $P(B \cap D) = P(B).P_B(D) = 0{,}40 \times 0{,}01 = 0{,}004.$

2. $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B)$

   $= P(A).P_A(D) + P(B).P_B(D)$

   $= 0{,}60 \times 0{,}02 + 0{,}004$

   $= 0{,}016.$ CQFD

3. $P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}004}{0{,}016} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Partie B : Loi binomiale, loi de Poisson et loi normale :

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale car :
   On a un prélèvement à deux issues complémentaires
   - Succès (verre défectueux) de probabilité $p = 0.016$
   - Echec (verre non défectueux) de probabilité q=1-p=0.984

Ce prélèvement est répété n fois, de façons indépendantes car ces prélèvements sont assimilés à des tirages avec remise de n verres, donc probabilité constante.

X désigne le nombre de verres défectueux donc $X \leadsto$B $(n\,; 0{,}016)$.

2. $n = 250.$
   a/ $E(X) = np = 250 \times 0{,}016 = 4.$
   Parmi les 250 verres prélevés, <u>en moyenne</u>, 4 seront défectueux.
   b/ $P(X = 0) = C_{250}^{0}\,(0{,}016)^0(0{,}984)^{250} = 0{,}018.$
   c/ $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}018 = 0{,}982.$
   d/ B $(n\,; p)$ ≈P (λ) alors $\lambda = np = 250 \times 0{,}016 = 4.$
   Donc B (250 ; 0,016) ≈ P (4).
   e/ $Y \leadsto$ P (4).
   $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}018 = 0{,}982.$
   (Par lecture de la table.).

3. $Z \leadsto$ N (16; 3,97).
   a. B $(n\,; p) \approx$ N $(m; \sigma)$; avec
   $$\begin{cases} m = n \times p = 1000 \times 0.016 = 16 \\ \sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{1000 \times 0.016 \times 0.984} = 3.97 \end{cases}$$
   D'où : B (1000 ; 0.016) ≈ N (16; 3.97)

   b. On pose $T = \frac{Z-16}{3{,}97}$ alors $T \leadsto$ N (0; 1).
   $$P(Z \geq 17{,}5) = P\left(T \geq \frac{17{,}5 - 16}{3{,}97}\right)$$
   $$= P(T \geq 0{,}38)$$
   $$= 1 - \pi(0{,}38)$$
   $$= 1 - 0{,}6480$$
   $$= 0{,}352 \approx 0{,}35$$

Partie C : Intervalle de confiance :

$F \leadsto N\left(p; \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\right)$;

1. $f = \frac{70}{100} = 0.7$; donc $p \approx 0.7$
2. $I = \left[f - t.\sqrt{\frac{f\,(1-f)}{n-1}}\ ;\ f + t.\sqrt{\frac{f\,(1-f)}{n-1}}\right]$;

t est à déterminer tel que: $P\left(f - t.\sqrt{\frac{f\,(1-f)}{n-1}} \le F \le f + t.\sqrt{\frac{f\,(1-f)}{n-1}}\right) = 0.95$

On pose $T' = \frac{F-f}{\sqrt{\frac{f\,(1-f)}{n-1}}}$ alors $T' \leadsto N\,(0; 1)$.

On a alors : $P(-t \le T' \le +t) = 0.95$

C'est-à-dire $2\pi(t) - 1 = 0.95$

Donc $\pi(t) = 0.975 = \pi(1.96)$

D'où : $t = 1.96$ et $I = \left[0.7 - 1.96.\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{99}}\ ; 0.7 + 1.96.\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{99}}\right]$

$$I = [0.61\ ; 0.79]$$

3. Non, on ne peut pas **affirmer** que p soit compris dans cet intervalle.

Si on prélevait un très grand nombre de tels échantillons, environ 95%d'entre eux contiendraient le pourcentage inconnu p de la population.
Donc on ne peut pas être sure !!!