BTS OPTICIEN LUNETIER
Mathématiques
SESSION 2014

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Proposition de corrigé par Laurent Deshayes, professeur à l'Institut et Centre d'Optométrie de Bures-sur-Yvette

ICO
INSTITUT ET CENTRE D'OPTOMÉTRIE
INTERNATIONAL COLLEGE OF OPTOMETRY

EXERCICE 1

A. Modèle discret du premier traitement : étude de suites

1° $u_o = 1{,}8$ car on injecte une dose de 1,8 unités à l'instant t = 0.

u_{n+1} est égal à la dose précédente u_n diminuée de 30% et augmentée de 1,8 :
$u_{n+1} = u_n - \frac{30}{100}u_n + 1{,}8 = (1 - 0{,}3)u_n + 1{,}8$;
il en découle finalement : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$, pour tout entier naturel n.

2° Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0{,}7u_n + 1{,}8 - 6 = 0{,}7u_n - 4{,}2$
avec $v_n = u_n - 6$ donc avec $u_n = v_n + 6$

ainsi, $v_{n+1} = 0{,}7u_n - 4{,}2 = 0{,}7(v_n + 6) - 4{,}2 = 0{,}7\,v_n + 4{,}2 - 4{,}2$

donc $v_{n+1} = 0{,}7\,v_n$, pour tout entier n.
Ce qui prouve que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison q = 0,7 et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 1{,}8 - 6 = -4{,}2$.

3° $v_n = v_0\,q^n = -4{,}2 \times (0{,}7)^n$
$u_n = v_n + 6$ donc $u_n = 6 - 4{,}2 \times (0{,}7)^n$

4°

a) La limite de la suite géométrique (v_n) est égale à zéro car sa raison est comprise entre -1 et 1 donc par addition la limite de la suite (u_n) est égale à 6.

b) Au bout d'un long moment, la quantité de médicament est proche de 6 unités donc le but, qui est que cette quantité soit supérieure à 5, est atteint au bout de quelques heures. (Un calcul avec une calculatrice donne $u_n > 5$ à partir de n = 5)

B. Modèle continu du second traitement : résolution d'une équation différentielle

1° Les solutions de l'équation (E_0) : $y' + y = 0$ sont les fonctions f définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(t) = ke^{-t}$, $k \in \mathbb{R}$

2°

- La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et :
  $g'(t) = 5 \times (-0{,}5\, e^{-0{,}5t}) = -2{,}5\, e^{-0{,}5t}$

- On remplace alors la fonction g dans le membre de gauche de l'équation différentielle (E) :
  $g'(t) + g(t) = -2{,}5\, e^{-0{,}5t} + 5\, e^{-0{,}5t} = 2{,}5\, e^{-0{,}5t}$, pour tout réel t de $[0 ; +\infty[$,
  donc la fonction g est solution de l'équation différentielle (E)

3° Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(t) = ke^{-t} + g(t)$; $k \in \mathbb{R}$

C'est-à-dire par $f(t) = ke^{-t} + 5\, e^{-0{,}5t}$; $k \in \mathbb{R}$

4° Déterminons la constante k telle que f (0) = 0 :
$f(0) = ke^0 + 5\, e^0 = k + 5 = 0$ donc $k = -5$
La fonction f recherchée est la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :
$f(t) = -5\, e^{-t} + 5\, e^{-0{,}5t}$.

C. Étude d'une fonction

On remarque que la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = -5\, e^{-t} + 5\, e^{-0{,}5t}$

est la fonction obtenue à la fin de la partie B.

1°

a)

$\lim\limits_{t\to+\infty} -t = -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$

de la même façon $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,5t} = 0$

donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$

b) On en déduit que la courbe *C* admet, en +∞, une asymptote parallèle à l'axe des abscisses d'équation y = 0.

2°

a) La fonction f est dérivable sur [0 ; +∞ [et :

$$f'(t) = -5 \times (-1)e^{-t} + 5 \times (-0,5)e^{-0,5t}$$
$$= 5e^{-t} - 2,5e^{-0,5t}$$

Développons maintenant l'expression donnée $2,5e^{-t}(2 - e^{0,5t})$:

$2,5e^{-t}(2 - e^{0,5t}) = 5e^{-t} - 2,5e^{-t}e^{0,5t} = 5e^{-t} - 2,5e^{-t+0,5t}$

$= 5e^{-t} - 2,5e^{-0,5t}$.

Donc $f'(t) = 2,5e^{-t}(2 - e^{0,5t})$, pour tout réel t de l'intervalle [0 ; +∞ [

b)

$f'(t) \geq 0$

$2 - e^{0,5t} \geq 0$ car $2,5e^{-t} > 0$ sur [0 ; +∞ [

$2 \geq e^{0,5t}$

$\ln 2 \geq 0,5t$

$\dfrac{\ln 2}{0,5} \geq t$

$t \leq 2\ln 2$ avec $2\ln 2 = \ln 4$

c)

$$f(\ln 4) = -5e^{-\ln 4} + 5e^{-0,5\ln 4} \quad \text{avec} \begin{cases} e^{-\ln 4} = e^{\ln\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4} \\ e^{-0,5\ln 4} = e^{-\ln 2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

la valeur exacte de f(ln 4) est finalement : $-\dfrac{5}{4} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{4} = 1,25$

Le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; +∞ [est :

t	0		ln 4		+∞
Signe de f '(t)		+	0	−	
Variations de f	0	↗	1,25	↘	0

3° T a pour équation : $y = f'(0)(t-0) + f(0)$

Avec $\begin{cases} f'(0) = 5e^{0} - 2{,}5e^{0} = 5 - 2{,}5 = 2{,}5 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

$T : y = 2{,}5t$

4°

a) Le logiciel donne l'expression d'une primitive F de la fonction f sur [0 ; +∞ [:
$F(t) = 5e^{-t} - 10e^{-0{,}5t}$

Il faut calculer F'(t) :
F est dérivable sur [0 ; +∞ [et $F'(t) = 5 \times (-1)e^{-t} - 10 \times (-0{,}5)e^{-0{,}5t}$

$F'(t) = -5e^{-t} + 5e^{-0{,}5t} = f(t)$, pour tout t de l'intervalle [0 ; +∞ [

Donc le logiciel fournit effectivement une primitive de la fonction f sur [0 ; +∞ [.

b) $I = \int_0^6 f(t)dt = [F(t)]_0^6 = [5e^{-t} - 10e^{-0{,}5t}]_0^6$

$= 5e^{-6} - 10e^{-3} - (5e^{0} - 10e^{0}) = 5e^{-6} - 10e^{-3} - (-5)$

$I = 5e^{-6} - 10e^{-3} + 5.$

La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'intégrale I est : 4,51.

EXERCICE 2

A. Événements indépendants

1° $P(A \cap B) = 0{,}0006$

2° $P(A \cup B) = 0{,}0494$

3° $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}9506$

4° La probabilité que la lentille prélevée présente un seul des deux défauts est : 0,0488

B. Loi binomiale, loi de Poisson

1°

a) On considère une épreuve élémentaire, qui consiste à prélever une seule lentille dans ce stock, qui a exactement 2 issues : la lentille prélevée est non conforme aux normes de commercialisation de probabilité **0,05** ou non.

On répète **120** fois cette épreuve élémentaire de façon indépendante car ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

Donc la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de lentilles non conformes suit la loi binomiale de paramètres 120 et 0,05.

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{120}{0} 0{,}05^0 \times 0{,}95^{120} = 1 - 0{,}95^{120} \cong 1 - 0{,}002$
$\cong 0{,}998$

2°

a) $\lambda = 120 \times 0{,}05 = 6$

b) $P(Y \leq 5) = P(Y=0) + P(Y=1) + \ldots + P(Y=5)$ et on lit ces valeurs dans la table de la loi de Poisson :

$P(Y \leq 5) \cong 0{,}002 + 0{,}015 + 0{,}045 + 0{,}089 + 0{,}134 + 0{,}161 \cong 0{,}446$.

c) Il s'agit de la probabilité de l'événement contraire de l'événement précédent :
$P(Y \geq 6) = 1 - P(Y < 6) = 1 - P(Y \leq 5) \cong 1 - 0{,}446 \cong 0{,}554$.

C. Loi normale

La probabilité qu'une lentille prélevée au hasard soit conforme pour la densité est :
$P(0{,}88 \leq Z \leq 1{,}12)$.

On calcule cette probabilité

- Soit en utilisant la table de la loi normale centrée réduite :
  La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne 1 et d'écart type 0,08
  donc la variable aléatoire T définie par T = $\frac{Z-1}{0{,}08}$ suit la loi normale
  N (0 ; 1).
  $$P(0{,}88 \leq Z \leq 1{,}12) = P\left(\frac{0{,}88-1}{0{,}08} \leq T \leq \frac{1{,}12-1}{0{,}88}\right) = P(-1{,}5 \leq T \leq 1{,}5) = 2\pi(1{,}5) - 1$$
  $$\cong 2 \times 0{,}9332 - 1 \cong 0{,}8664 \cong 0{,}867\,.$$

- Soit en utilisant une calculatrice qui donne directement le résultat demandé (0,86639)
  (stat DIST NORM puis on rentre 0,88 ; 1,12 ; l'écart type 0,08 ; la moyenne 1)

  Ou 2nde distrib normalFRép puis on rentre 0,88 ; 1,12 ; la moyenne 1; l'écart type 0,08 selon les calculatrices)

D. Intervalle de confiance

1° L'intervalle de confiance recherché est : $\left[\,\bar{d} - t\frac{\sigma}{\sqrt{150}}\ ;\ \bar{d} + t\frac{\sigma}{\sqrt{150}}\,\right]$

Avec : $\bar{d} = 1{,}108$ $\sigma = 0{,}07$

Et la valeur de t est telle que $2\pi(t) - 1 = 0{,}95$
Donc $\pi(t) = 1{,}95 / 2 = 0{,}975$
Et finalement $t = 1{,}96$ par lecture inverse de la table de la loi normale centrée réduite.

Application numérique :

$$\left[1{,}108 - 1{,}96\frac{0{,}07}{\sqrt{150}}\ ;\ 1{,}108 + 1{,}96\frac{0{,}07}{\sqrt{150}}\right]$$

L'intervalle [1,10 ; 1,12] est l'intervalle de confiance de la moyenne inconnue μ, avec le coefficient de confiance de 0,95.

2° L'affirmation « on est sûr que la moyenne μ appartient à l'intervalle de confiance obtenu à la question précédente » est **fausse** ; il est possible que la densité moyenne inconnue μ des lentilles de la production annuelle de ce fabriquant n'appartienne pas à l'intervalle de confiance déterminé avec le coefficient de confiance de 95%; le calcul a montré qu'avec un coefficient de confiance différent, les bornes de cet intervalle seraient différentes.