BTS OPTICIEN LUNETIER
Mathématiques
SESSION 2015

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Proposition de corrigé par Laurent Deshayes, professeur à l'Institut et Centre d'Optométrie de Bures-sur-Yvette

EXERCICE 1

A. Modélisation de la concentration du produit dans le sang

1°)

a) Les points de coordonnées (t, z) sont plus proches d'une droite que ne le sont les points de coordonnées (t, C), donc un ajustement affine de z en t semble mieux approprié qu'un ajustement affine de C en t.

b) *Pour des variables qui varient en sens inverse, on sait qu'un ajustement affine est justifié quand le coefficient de corrélation linéaire est proche de -1 ; et plus le coefficient est proche de -1, meilleur est l'ajustement affine.*

Parmi les deux coefficients, celui qui est le plus proche de -1 est celui qui vaut
-0,9996, il s'agit du coefficient de corrélation linéaire de la série (t, z);
ce qui confirme la conjecture graphique de la question précédente.

2°) $z = -\,0{,}250\,t + 2{,}983$

3°) On a posé $z = \ln C$

$z = \ln C = - 0{,}250\, t + 2{,}983$

Ce qui permet d'obtenir l'expression de C en fonction du temps t en composant par la fonction exponentielle :

$C = \mathrm{e}^{- 0{,}250\, t + 2{,}983} = \mathrm{e}^{2{,}983}\, \mathrm{e}^{-0{,}250t}$

C'est bien de la forme $C = C_0\, \mathrm{e}^{a\,t}$ avec $C_0 = \mathrm{e}^{2{,}983} \cong 20$ (et avec a = -0,250)

$$\underline{C = 20\, \mathrm{e}^{-0{,}250\, t}}$$

<u>Interprétation de C_0</u> :

À l'instant t = 0 : $C = C_0\, \mathrm{e}^{a\,t} = C_0\, \mathrm{e}^{0} = C_0$

C_0 (20 μg/L) est la concentration du produit actif dans le sang à l'instant $t = 0$.

4°) On résout l'inéquation d'inconnue t :

$20\, \mathrm{e}^{-0{,}25t} < 1{,}5$

$\mathrm{e}^{-0{,}25t} < 1{,}5 / 20$

$\mathrm{e}^{-0{,}25t} < 0{,}075$ puis on compose par la fonction ln, ce qui donne :

$-0{,}25\, t < \ln 0{,}075$

$$t > \frac{\ln 0{,}075}{-0{,}25}$$

avec $\dfrac{\ln 0{,}075}{-0{,}25} \cong 10{,}36$ h

Soit 10 h et 0,36 x 60 minutes et donc finalement environ 10 h 21,6 minutes

<u>La concentration du produit sera inférieure à 1,5 μg/L au bout de 10 h et 22 minutes.</u>

B. Modélisation de la concentration dans l'humeur aqueuse

1°) équation (E_0) : $y' + 0{,}05\, y = 0$

On peut utiliser les solutions données avec a = 1 et b = 0,05

Les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions f définies sur [0 ; +∞ [par :

$$f(t) = k\, \mathrm{e}^{-0{,}05t},\ k \in \mathbb{R}$$

2°) λ = -5 est la réponse correcte du qcm, que l'on ne justifie pas.

(Justification : $h'(t) + 0{,}05\,h(t) = 0{,}05g(t) = e^{-0{,}25t}$, *pour tout réel t positif*
Avec $h(t) = \lambda\, e^{-0{,}25t}$, et $h'(t) = -0{,}25\,\lambda\, e^{-0{,}25t}$
λ *est solution de :* $-0{,}25\,\lambda + 0{,}05\,\lambda = 1$ *. . .)*

3°) Les solutions de l'équation (*E*) sont les fonctions f définies sur [0 ; +∞ [par :

$f(t) = k\,e^{-0{,}05t} + h(t) = k\,e^{-0{,}05t} - 5\,e^{-0{,}25t}$ (où $k \in \mathbb{R}$)

4°) Déterminons la constante k telle que f(0) = 0 :

$$k\,e^{0} - 5\,e^{0} = 0$$
$$k - 5 = 0$$
$$k = 5$$

Finalement, la fonction f recherchée est la fonction définie sur [0 ; +∞ [par :

$$\underline{f(t) = 5\,e^{-0{,}05t} - 5\,e^{-0{,}25t}}.$$

C. *Exploitation du modèle précédent*

Remarque : Cette fonction est la même que celle trouvée dans la partie B.

1°) $$m = \frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)dt = [F(t)]_0^{12} = \frac{1}{12}\left[20\,e^{-0{,}25\,t} - 100\,e^{-0{,}05t}\right]_0^{12}$$

(En utilisant la primitive F de f donnée par la commande 4 du logiciel)

$$m = \frac{1}{12}\left(20\,e^{-3} - 100\,e^{-0{,}6} - (20 - 100)\right) = \frac{1}{12}\left(20\,e^{-3} - 100\,e^{-0{,}6} + 80\right)$$

2°) Il y a deux façons de répondre à cette question :

<u>Graphiquement :</u>

On lit sur le graphique donnant la courbe de la fonction f les coordonnées du point le plus haut de la courbe.
Ce point a pour abscisse environ 8 et pour ordonnée environ 2,7

<u>Conclusion</u> :

La concentration maximale est d'environ 2,7 μg/L
Elle est atteinte au bout de 8 heures environ.

Avec l'étude du signe de la dérivée :

On utilise l'expression factorisée de f '(t), vérifiée par les commandes 2 et 3 du logiciel :

$$f'(t) = -0{,}25e^{-0{,}05t}(1 - 5e^{-0{,}2t})$$

$$f'(t) \geq 0$$

$$1 - 5e^{-0{,}2t} \leq 0 \qquad \text{car } -0{,}25e^{-0{,}05t} < 0 \text{ sur } [\,0 \,;\, +\infty\,[$$

$$1 \leq 5e^{-0{,}2t}$$

$$1/5 \leq e^{-0{,}2t}$$

$$\ln 0{,}2 \leq -0{,}2t$$

$$t \leq \frac{\ln 0{,}2}{-0{,}2}$$

Le sens de variation de la fonction f sur [0 ; +∞[est donc :

t	0		$\frac{\ln 0{,}2}{-0{,}2}$		$+\infty$
Signe de f'(t)		+	0	-	
Variations de f		↗		↘	

La valeur du maximum est : $f\left(\frac{\ln 0{,}2}{-0{,}2}\right) = 5e^{0{,}25\ln 0{,}2} - 5e^{1{,}25\ln 0{,}2}$

Conclusion :

La concentration maximale est de : $5e^{0{,}25\ln 0{,}2} - 5e^{1{,}25\ln 0{,}2}$ (environ 2,67 μg/L)

Elle est atteinte au bout de $\frac{\ln 0{,}2}{-0{,}2}$ heures (environ 8,05 heures)

3°) On observe, sur le graphique, que la courbe de la fonction f est au-dessus de la droite d'équation y = 2 entre environ entre 3 h et 17,5 heures.
Cette simple observation permet de dire que la concentration du produit dans l'humeur aqueuse reste supérieure à 2 μg/L pendant plus 14 heures donc pendant au moins 10 heures.

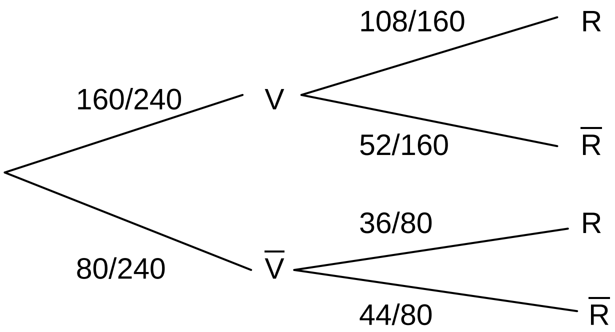
EXERCICE 2

A. Probabilités conditionnelles

Il y a deux façons de répondre à ces questions :

Avec un arbre

1°)



2°) $P(R \cap V) = \frac{160}{240} \times \frac{108}{160} = \frac{108}{240} = 0{,}45$

3°) $P(R) = 0{,}45 + \frac{80}{240} \times \frac{36}{80} = 0{,}45 + \frac{36}{240} = 0{,}45 + 0{,}15 = 0{,}6$

4°) $P_R(V) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{0{,}45}{0{,}6} = 0{,}75$

Avec un tableau

1°)

	V	$\overline{V}$	total
R	108	36	144
$\overline{R}$	52	44	96
total	160	80	240

2°) $P(R \cap V) = \frac{108}{240} = 0{,}45$

3°) $P(R) = \frac{144}{240} = 0{,}6$

4°) $P_R(V) = \frac{108}{144} = 0{,}75$

B. Loi binomiale

1°)

* On considère une épreuve de Bernoulli, qui consiste à prélever une seule fiche avec :

$$\begin{cases} \text{Succès : la fiche prélevée est celle d'un répondeur, de probabilité } \mathbf{0{,}6} \\ \text{Échec : l'évènement contraire.} \end{cases}$$

* On répète **160** fois cette épreuve de façon identique et indépendante, car on tire au hasard et avec remise les fiches (ce qui constitue un schéma ce Bernoulli).

* La variable aléatoire X compte le nombre de succès obtenus.

* Conclusion : la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres **160** et **0,6**.

2°)

$E(X) = 160 \times 0{,}6 = 96$

Interprétation : si on effectue de nombreux prélèvements, alors le nombre moyen de fiches correspondant à des demandeurs est proche de 96.

3°)

a) $P(X = 96) \cong 0{,}064$

b) $P(X \geq 108) = 1 - P(X \leq 107) \cong 1 - 0{,}969 \cong 0{,}031$

C. Loi normale et test d'hypothèse

1°)

D'après la propriété, $h = 2 \times 0{,}067 \cong 0{,}134$

On a donc $P(-\,0{,}134 \leq D \leq 0{,}134) = 0{,}95$

2°)

On prélève un échantillon de 160 patients traités par vertéporfine et on calcule la fréquence des répondeurs f_1 ;
On prélève également un échantillon de 80 patients ayant reçu un placébo et on calcule la fréquence des répondeurs f_2 ;
On calcule enfin la différence entre ces fréquences : $d = f_1 - f_2$.

Si $d \in [-0{,}134 ; 0{,}134]$, alors on accepte l'hypothèse H_0
Sinon on rejette H_0.

3°) $f_1 = \frac{108}{160} = 0{,}675$ $f_2 = \frac{36}{80} = 0{,}45$

La différence est : $d = 0{,}675 - 0{,}45 = 0{,}225$

$0{,}225 \notin [-0{,}134 ; 0{,}134]$ donc on rejette H_0

<u>Conclusion : au seuil de signification de 5%, on peut rejeter l'hypothèse H_0</u>

Donc on accepte, au seuil de 5%, l'hypothèse selon laquelle il y a une différence significative entre les proportions de répondeurs parmi les patients traités par vertéporfine et ceux ayant reçu un placebo.