BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

SESSION 2016

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Proposition de corrigé par Laurent DESHAYES, professeur de mathématiques au Lycée Technique d'Optométrie de Bures-sur-Yvette.

INSTITUT ET CENTRE D'OPTOMÉTRIE
INTERNATIONAL COLLEGE OF OPTOMETRY

EXERCICE 1

A.

1° Le coefficient de corrélation linéaire de la série (x, z) est : $r \cong 0{,}9997$. (arrondi à 10^{-4})
Un ajustement affine de cette série est pertinent car $r \cong 1$.

2° Une équation de la droite de régression de z en x, selon la méthode des moindres carrés est : $z = 0{,}301x - 2{,}945$.

3°

- Le premier jour ouvré du mois de mai 2016 correspond au rang 28.
- Calculons la valeur de z avec l'équation obtenue précédemment :
  $z = 0{,}301 \times 28 - 2{,}945 = 5{,}483$
- Déterminons maintenant la valeur de y en utilisant le changement de variable

$$z = \ln\left(\frac{y}{200 - y}\right)$$

$$e^z = \frac{y}{200 - y}$$

$$(200 - y)\, e^z = y$$

$$200\, e^z - y\, e^z = y$$

$$200\, e^z = y + y\, e^z$$

$$200\, e^z = y\,(1 + e^z)$$

Et finalement : $y = \dfrac{200\, e^z}{1 + e^z}$

Avec z = 5,483 ; y = $\dfrac{200\,e^{5,483}}{1+e^{5,483}} \cong 199$ (centaines de verres)

Conclusion : on peut estimer à 19 900 le nombre de verres fabriqués le premier jour ouvré du mois de mai 2016.

B.

1° On utilise l'expression de $f\,'(x)$ donnée par le logiciel (1ère ligne) :

$f\,'(x) = 1140\,\dfrac{e^{-0,3x}}{(19e^{-0,3x}+1)^2}$ et on étudie son signe :

Les quantités $e^{-0,3x}$ et $(19e^{-0,3x}+1)^2$ sont strictement positives, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; +∞ [, on en déduit que $f\,'(x)$ est strictement positif sur [0 ; +∞ [et que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; +∞ [.

2° a) D'après le logiciel (3ème ligne), la limite de $f(x)$ quand x tend vers +∞ est égale à 200, cela justifie le fait que la courbe *C* admet une asymptote, en + ∞, d'équation y = 200.

b) Utilisons la valeur approchée de l'intégrale donnée par le logiciel (2ème ligne) :

La valeur moyenne demandée est : $\dfrac{1}{24-0}\displaystyle\int_0^{24} f(x)\,dx \cong \dfrac{2812,235459513}{24} \cong 117,18$

3° a) La fonction f est continue, strictement croissante sur l'intervalle [0 ; +∞ [et a pour limite 200 en +∞, donc, la valeur maximale de f est 200 ; ce qui explique pourquoi l'entreprise ne peut pas envisager, dans ces conditions, d'atteindre un niveau de production de 250 centaines de verres par jour.

b) D'après la question 2° b), le nombre moyen de verres fabriqués par jour pendant cette période de 24 mois est de 11 718.

C.

1° Le nombre de clients en mars 2014 est représenté par u_2

Calcul de u_1 : $u_1 = 0{,}98\, u_0 + 6 = 0{,}98 \times 120 + 6 = 123{,}6$ (124 clients en février 2014)

Calcul de u_2 : $u_2 = 0{,}98\, u_1 + 6 = 0{,}98 \times 123{,}6 + 6 = 127{,}128$

(Ou $u_2 = 0{,}98\, u_1 + 6 = 0{,}98 \times 124 + 6 = 127{,}52$)

Conclusion : le nombre de clients de l'entreprise en mars 2014 est estimé selon ce modèle à 127 (ou 128 si on a arrondi u_1 à l'unité près dans le calcul intermédiaire)

2° L'algorithme qui réalise l'objectif recherché est l'algorithme 3.

3° a) Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n :

- $v_{n+1} = 300 - u_{n+1}$ (il s'agit de la relation entre v_n et u_n écrite au rang n+1)

- On obtient ensuite v_{n+1} en fonction de u_n (avec la relation de récurrence) :
  $v_{n+1} = 300 - (0{,}98\, u_n + 6) = 294 - 0{,}98\, u_n$

- On factorise cette expression par 0,98 :
  $v_{n+1} = 294 - 0{,}98\, u_n = 0{,}98\left(\frac{294}{0{,}98} - u_n\right) = 0{,}98\,(300 - u_n) = 0{,}98\, v_n$

- Finalement, $v_{n+1} = 0{,}98\, v_n$, pour tout entier naturel n, donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,98.

b)

- La suite (v_n) étant géométrique de 1er terme $v_0 = 180$ et de raison q = 0,98 :
  $v_n = v_0\, q^n = 180 \times 0{,}98^n$, pour tout entier naturel n.

- $v_n = 300 - u_n$ donc $u_n = 300 - v_n$ et on obtient finalement :
  $u_n = 300 - 180 \times 0{,}98^n$, pour tout entier naturel n

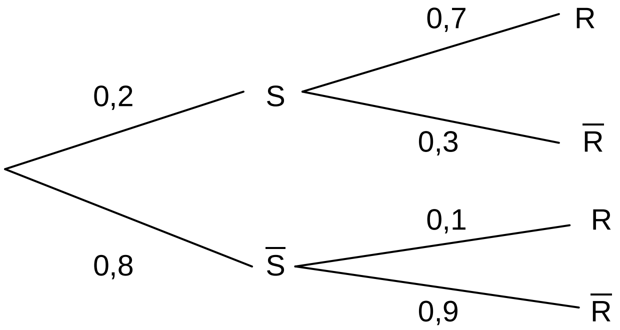
c) La limite de la suite géométrique (v_n) est égale à 0 (car sa raison est comprise entre -1 et 1) donc par addition, la limite de la suite (u_n) est égale à 300.

Interprétation : à long terme, le nombre de clients dans cette entreprise se stabilise à 300 clients.

EXERCICE 2

A.

1°



2° $P(S \cap R) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$

3° $P(R) = 0,14 + 0,8 \times 0,1 = 0,14 + 0,08 = 0,22$

La probabilité que le fichier prélevé soit celui d'un client ayant demandé le traitement anti-reflet de ses verres est bien égale à 0,22.

4° $P_R(S) = \dfrac{P(S \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0,14}{0,22} \cong 0,636$

B.

1°

- On considère une épreuve de Bernoulli, qui consiste à prélever un seul fichier avec :

  $\begin{cases} \text{Succès : le fichier prélevé est celui d'un client ayant demandé le traitement anti-} \\ \qquad \text{rayure de ses verres, de probabilité } p = 0,45 \\ \text{Échec : l'évènement contraire.} \end{cases}$

- On répète 100 fois cette épreuve de façon identique et indépendante, car on tire au hasard et avec remise les fichiers.

- La variable aléatoire X compte le nombre de succès obtenus.

- Donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,45$.

2° a) On lit dans le tableur (colonne B) et on arrondit à 10^{-3} :
$P(X = 50) \cong 0,048$

b) La colonne C du tableur indique : $\begin{cases} P(X \leq 54) \cong 0,971 \\ P(X \leq 55) \cong 0,982 \end{cases}$

On en conclut que le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) \geq 0,975$ est 55

3° a) moyenne : $m = n\,p = 100 \times 0{,}45 = 45$

écart type : $\sigma = \sqrt{n\ p\ (1-p)} = \sqrt{100 \times 0{,}45 \times 0{,}55} \cong 4{,}975$

b) $P(Z \geq 49{,}5) \cong 0{,}183$

C.

1° La probabilité d'avoir exactement quatre clients achetant des verres polarisants un samedi après-midi est : 0,134

2° La probabilité qu'un samedi après-midi, il y ait au plus deux clients achetant des verres polarisants est : 0,062

D.

1° L'estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p est : $f = \frac{135}{150} = 0{,}9$

2°

L'expression de l'intervalle de confiance recherché est : $\left[\ f - t\sqrt{\frac{f\,(1-f)}{n}}\ ;\ f + t\sqrt{\frac{f\,(1-f)}{n}}\ \right]$

Avec : $\begin{cases} f = 0{,}9\ ;\ n = 150 \\ t = 1{,}96 \ \text{ (car le niveau de confiance est de 95\%)} \end{cases}$

$t\sqrt{\frac{f\,(1-f)}{n}}$ vaut alors : $1{,}96\sqrt{\frac{0{,}9 \times 0{,}1}{150}}$ dont l'arrondi à 10^{-2} est : 0,05

L'intervalle de confiance de la proportion p avec le niveau de confiance de 95% est donc

l'intervalle [0,85 ; 0,95]

3°

Le niveau de confiance de 95% signifie qu'environ 95% des intervalles qu'on peut obtenir ainsi contiennent la proportion p de la population.

Donc on n'est pas certain que la proportion p appartienne à l'intervalle de confiance obtenu à la question précédente.