BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

SESSION 2017

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Proposition de corrigé par Laurent DESHAYES, professeur de mathématiques au Lycée Technique d'Optométrie de Bures-sur-Yvette.

ICO
INSTITUT ET CENTRE D'OPTOMÉTRIE
INTERNATIONAL COLLEGE OF OPTOMETRY

EXERCICE 1

A. Étude expérimentale du refroidissement

1° Le coefficient de corrélation linéaire de la nouvelle série ($r_2 \cong -0,997$) est plus proche de -1 que ne l'est le coefficient de corrélation linéaire de la série initiale ($r_1 \cong -0,886$) donc le changement de variable est pertinent.

2° $z = -0,15\,t + 4,01$

3° $z = \ln(T - 20) = -0,15\,t + 4,01$

$$T - 20 = e^{-0,15\,t + 4,01}$$

$$T = 20 + e^{-0,15\,t + 4,01}$$

En utilisant la propriété suivante : $e^{A+B} = e^{A}\,e^{B}$,

on obtient alors : $T = 20 + e^{-0,15\,t}\,e^{4,01}$ de la forme $T = 20 + C_0\,e^{at}$

avec $C_0 = e^{4,01} \cong 55$ et $a = -0,15$

B. *Étude théorique du refroidissement*

1° $y' = -0{,}15\,(y - 20) = -0{,}15y + 0{,}15 \times 20 = -0{,}15y + 3$

Donc l'équation (*E*) s'écrit aussi : $y' + 0{,}15\,y = 3$

2° Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions *f* définies sur l'intervalle [0 ; +∞[par $f(t) = k\,e^{-0{,}15t}$ où $k \in \mathbb{R}$

3° *g* est dérivable sur [0 ; +∞[et $g'(t) = 0$

g est solution de (*E*) donc

$g'(t) + 0{,}15\,g(t) = 3$, pout tout *t* de [0 ; +∞[

$0 + 0{,}15\,c = 3$

Donc $c = \dfrac{3}{0{,}15} = 20$

4° Les solutions de l'équation différentielle (*E*) sont les fonctions *f* définies sur l'intervalle [0 ; +∞[par $f(t) = k\,e^{-0{,}15t} + 20$ où $k \in \mathbb{R}$

5° La monture en acétate est chauffée à 75 °C et on la sort du four à l'instant t = 0 ; il s'agit donc de déterminer la fonction *f* solution de l'équation différentielle (*E*) vérifiant $f(0) = 75$:

$k\,e^{0} + 20 = 75$

$k = 75 - 20 = 55$

Conclusion : *f* est définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par $f(t) = 55\,e^{-0{,}15t} + 20$

C. Exploitation du modèle précédent

1° $f(15) \cong 25{,}8$ d'après le tableau de valeurs

donc la température au bout de 15 minutes au degré près est : 26 °C

2° a) f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$

et $f'(t) = 0 + 55 \times (-0{,}15)\, e^{-0{,}15\,t} = -8{,}25\, e^{-0{,}15\,t}$

b) signe de $f'(t)$: $e^{-0{,}15\,t} > 0$, pour tout réel t de $[0\,;+\infty[$

donc $f'(t) < 0$, pour tout réel t de $[0\,;+\infty[$

On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

3° a) $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}15t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 20$

b) La courbe C admet, en $+\infty$, une asymptote d'équation $y = 20$.

4° T : $y = 75 - \dfrac{33}{4}t$

5° a)

Étapes	Valeurs de t	Valeurs de $f(t)$	Condition $f(t) > 24$	Affichage
étape 1	15	$f(15) \cong 25{,}8$	VRAIE	aucun
étape 2	16	$f(16) \cong 25{,}0$	VRAIE	aucun
étape 3	17	$f(17) \cong 24{,}3$	VRAIE	aucun
étape 4	18	$f(18) \cong 23{,}7$	FAUSSE	18

b) D'après le tableau précédent, la température de la monture est inférieure à 24°C à partir de l'instant $t_0 = 18$ minutes.

c) On modifie la ligne : t prend la valeur $t + 1$
qui devient : t prend la valeur $t + 0{,}1$

EXERCICE 2

A. Probabilités conditionnelles

1° a) $P(R) = \dfrac{\text{nombre de paires de lentilles rigides}}{\text{nombre total de paires de lentilles}}$ (situation d'équiprobabilité

car on prélève une paire de lentilles au hasard)

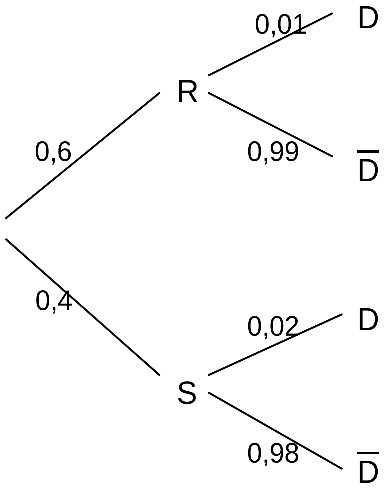
$$P(R) = \frac{900}{900+600} = \frac{900}{1500} = 0,6$$

b) $P(S) = P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0,6 = 0,4$

$P_R(D) = 0,01$

$P_S(D) = 0,02$

2° * arbre:



* $P(R \cap D) = 0,6 \times 0,01 = 6.10^{-3} = 0,006.$

3° $P(D) = 0,006 + 0,4 \times 0,02 = 0,006 + 0,008 = 0,014.$

4° $P_D(R) = \dfrac{P(R \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,006}{0,014} \cong 0,429$

B. Loi binomiale et loi normale

1°

- On considère une épreuve de Bernoulli, qui consiste à prélever une seule paire de lentilles de contact avec :

  $\begin{cases} \text{Succès : la paire de lentilles prélevée est défectueuse de probabilité } p = 0{,}014 \\ \text{Échec : l'évènement contraire.} \end{cases}$

- On répète n fois cette épreuve de façon identique et indépendante, car on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise des paires de lentilles.

- La variable aléatoire X compte le nombre de succès obtenus.

- Donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p = 0,014.

2° a) $P(X = 0) \cong 0{,}121$

b) La probabilité qu'au moins une paire de lentilles soit défectueuse est :

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \cong 1 - 0{,}121 \cong 0{,}879$

3° a) La loi de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi normale

- de moyenne : $np = 1\,000 \times 0{,}014 = 14$
- d'écart type $\sqrt{np(1\text{-}p)} = \sqrt{1000 \times 0{,}014 \times (1\text{-}0{,}014)} \cong 3{,}715$

b) $P(Y \leq 10{,}5) \cong 0{,}173$

C. Test d'hypothèse

1° la valeur approchée de *h* arrondie au centième est : 0,08

2° On prélève un échantillon de 100 lentilles et on calcule pour cet échantillon la moyenne des diamètres des 100 lentilles $\overline{z}$.

Si $\overline{z} \in [14{,}92 ; 15{,}08]$, alors on accepte H_0

sinon on rejette H_0.

3° $14{,}94 \in [14{,}92 ; 15{,}08]$ donc on accepte l'hypothèse nulle H_0

Conclusion du test : On peut considérer, au seuil de signification de 5 %, que la moyenne des diamètres des lentilles dans la production est 15 mm.