BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

SESSION 2019

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Corrigé proposé par M DESHAYES, professeur de mathématiques de l'Institut et Centre d'Optométrie de Bures-sur-Yvette.

INSTITUT
ET CENTRE
D'OPTOMÉTRIE
INTERNATIONAL COLLEGE
OF OPTOMETRY

EXERCICE 1

A.

1°)

a) Les solutions de (*E*) sont les fonctions f définies sur [0 ; +∞ [par :

$$f(t) = k\,e^{-\frac{0,2}{1}t} = k\,e^{-0,2t}\ ;\ \text{k constante réelle}$$

b) $f(0) = 20$

$k\,e^{0} = 20$

$k = 20$

La fonction f solution de (*E*) qui vérifie la condition initiale est la fonction f définie sur [0 ; +∞ [par $f(t) = 20\,e^{-0,2t}$

2°)

a) $e^{-0,2t} = 0,5$

$-0,2\,t = \ln 0,5$

$t = \dfrac{\ln 0,5}{-0,2}$

b) La demi-vie vérifie : $20\,e^{-0,2t} = \dfrac{20}{2} = 10$; ce qui correspond à l'équation précédente : $e^{-0,2t} = 0,5$

La demi-vie est donc $\dfrac{\ln 0,5}{-0,2}$

Environ 3,4657 heures (avec 0,4657 h = $0,4657 \times 60$ = 27,942 minutes)

La demi-vie de cet antibiotique est d'environ 3 h et 28 minutes.

3°)

a) La fonction F définie sur [0 ; +∞ [par

$F(t) = \dfrac{20}{-0,2}\,e^{-0,2t} = -100\,e^{-0,2t}$

est une primitive de la fonction f sur [0 ; +∞ [.

b) $A\ (U\ A) = \int_0^{15} f(t)dt$ (car la fonction f est positive sur [0 ; 15])

$A\ (U\ A) = [F(t)]_0^{15} = F(15) - F(0)$

$= -100\,e^{-0,2 \times 15} - (-100\,e^{-0}) = -100\,e^{-3} + 100 = 100\,(1 - e^{-3})$

B.

1°)

a) $g(t) = 20\,(e^{-0,2t} - e^{-2t})$

$g'(t) = 20\,(-0,2\,e^{-0,2t} - (-2)\,e^{-2t}) = 20\,(-0,2\,e^{-0,2t} + 2\,e^{-2t})$

$= \underline{-4\,e^{-0,2t} + 40\,e^{-2t}}$

or $40\,e^{-2t}(1 - 0,1\,e^{1,8t}) = 40\,e^{-2t} - 4\,e^{-2t}e^{1,8t} = 40\,e^{-2t} - 4\,e^{-2t+1,8t}$

$= \underline{40\,e^{-2t} - 4\,e^{-0,2t}}$

Les 2 expressions soulignées sont égales donc on a bien :

$g'(t) = 40\,e^{-2t}(1 - 0,1\,e^{1,8t})$, pour tout t de [0 ; +∞ [

b) Le signe de g'(t) est celui de $1 - 0{,}1\, e^{1{,}8t}$ car $40\, e^{-2t} > 0$, sur $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$

Le résultat de logiciel permet d'établir le signe de g'(t) :

t	0		$\frac{5}{9}\ln(10)$		$+\infty$
Signe de g'(t)		+	0	−	

c)

t	0		$\frac{5}{9}\ln(10)$		$+\infty$
Signe de g'(t)		+	0	−	
Variations de la fonction g		↗		↘	

d) La concentration plasmatique maximale est $g\left(\frac{5}{9}\ln(10)\right) \cong 13{,}9$ µg.L^{-1}.

2°) La biodisponibilité absolue de cet antibiotique est :

$$\frac{85{,}02}{100(1 - e^{-3})} \cong 0{,}89 \text{ soit } 89\%$$

C.

1°) $u_2 = 0{,}5\, u_1 + 20 = 0{,}5 \times 20 + 20 = 30$
Donc la concentration plasmatique de l'antibiotique immédiatement après la deuxième injection est 30 µg.L^{-1}.

2°)

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 40$

$= 0{,}5\, u_n + 20 - 40 = 0{,}5\, u_n - 20$

$= 0{,}5\,(v_n + 40) - 20 = 0{,}5\, v_n + 20 - 20 = 0{,}5\, v_n$

$v_{n+1} = 0{,}5\, v_n$, pour tout entier $n \geq 1$,

donc la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_1 = u_1 - 40 = 20 - 40 = -20$

b) La suite (v_n) étant géométrique, on a : $v_n = v_1\, q^{n-1} = -20 \times 0{,}5^{n-1}$

Donc $u_n = v_n + 40 = 40 - 20 \times 0{,}5^{n-1}$

c) $u_n = 40 - 20 \times 0{,}5^{n-1} = 40 - 20 \times 0{,}5^{n} \times 0{,}5^{-1} = 40 - 40 \times 0{,}5^{n}$

d) La limite de la suite géométrique (v_n) est égale à 0 car sa raison est comprise entre 0 et 1 donc la limite de la suite (u_n) est égale à 40.

3°)

a)

```
n ← 1
u ← 20
Tant que u < 38
        n ← n + 1
        u ← 0,5 x u + 20
Fin de Tant que
```

b) On applique cet algorithme en calculant les termes de la suite (u_n) :

n	1	2	3	4	5
u	20	30	35	37,5	38,75

Donc il faut 5 injections pour atteindre cet équilibre.

EXERCICE 2

A.

1°) Avec un grand nombre de meuleuses, la moyenne est très proche de l'espérance donc $\frac{1}{\lambda} = 2$ donc $\lambda = \frac{1}{2}$

2°)

a) $P(T < 1) = P(T \leq 1) = 1 - e^{-0{,}5 \times 1} \cong 0{,}393$

b) $P(T > 3) = 1 - P(T \leq 3) = 1 - (1 - e^{-0{,}5 \times 3}) = e^{-0{,}5 \times 3} \cong 0{,}223$

3°) Pour une meuleuse, il y a en moyenne une panne toutes les 2 semaines ; $\frac{52}{2} = 26$ donc le nombre moyen de pannes survenant en une année est de 26.

B.

1°)

a) Exactement 20 pannes : 0,042

b) Au maximum 22 : 0,252

2°) $P(X > 40) = 1 - P(X \leq 40) \cong 1 - 0{,}996 \cong 0{,}004$

C.

1°)

- On considère une épreuve de Bernoulli, qui consiste à considérer une seule meuleuse avec :

$$\begin{cases} \text{Succès : cette meuleuse est jugée défaillante de probabilité } p = 0{,}004 \\ \text{Échec : l'évènement contraire.} \end{cases}$$

- On répète 1000 fois cette épreuve de façon identique et indépendante car tirage avec remise.
- La variable aléatoire Y compte le nombre de succès obtenus.
- Donc Y suit la loi binomiale de paramètres 1000 et 0,004.

2°)

a) La loi de la variable aléatoire Y peut être approchée par la loi normale

- de moyenne : $np = 1000 \times 0{,}004 = 4$
- d'écart type $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \times 0{,}004 \times (1-0{,}004)} \cong 2{,}0$

b) $P(2{,}5 \leq Z \leq 7{,}5) \cong 0{,}733$

D.

1°) L'estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p est : $f = \frac{85}{100} = 0{,}85$

2°) L'intervalle de confiance est : $\left[f - 2{,}58\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 2{,}58\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$

Avec : f = 0,85 et n = 100 cela donne :

$$\left[\ 0{,}85 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}85 \times 0{,}15}{100}}\ ;\quad 0{,}85 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}85 \times 0{,}15}{100}}\ \right]$$

L'intervalle de confiance de la proportion p avec le coefficient de confiance de 99% est donc [0,758 ; 0,942]

3°) On ne peut pas affirmer que p est compris dans cet intervalle

Car le niveau de confiance de 99% signifie qu'environ 99% des intervalles qu'on peut obtenir ainsi contiennent la proportion p de la population.