BTS OPTICIEN LUNETIER
MATHÉMATIQUES
SESSION 2021

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Corrigé proposé par M. DESHAYES, professeur de mathématiques de l'Institut et Centre d'Optométrie de Bures-sur-Yvette.

INSTITUT ET CENTRE D'OPTOMÉTRIE
INTERNATIONAL COLLEGE OF OPTOMETRY

EXERCICE 1

A. Ajustement d'un nuage de points

1°)

x	60	80	120	160
$z = \ln(N(x))$	8,006	7,601	6,802	5,991

2°) $z = -0{,}02\,x + 9{,}21$

3°) $z = \ln(N(x)) = -0{,}02\,x + 9{,}21$

$$N(x) = \mathrm{e}^{-0{,}02\,x + 9{,}21} = \mathrm{e}^{-0{,}02\,x} \times \mathrm{e}^{9{,}21} \text{ avec } \mathrm{e}^{9{,}21} \approx 9\,997$$

Donc le nombre d'acheteurs potentiels peut être modélisé par la fonction N_1 définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $N_1(x) = 10\,000\,\mathrm{e}^{-0{,}02x}$

4°) $N_1(100) \approx 1\,353$

On estime à $1\,353$ le nombre d'acheteurs potentiels si les lunettes sont vendues au prix de 100 euros la paire.

B. *Modèle discret*

1°) a) On va utiliser cette propriété :

Diminuer un nombre de t %, c'est multiplier ce nombre par : $1-\frac{t}{100}$

$(1-\frac{33}{100})^2 = 0{,}4489 = 1 - 0{,}5511 = (1-\frac{55{,}11}{100}) \approx 1-\frac{55}{100}$

Donc deux diminutions successives de 33 % correspondent à une diminution globale d'environ 55 %

b) On utilise la fonction N_1 de la partie A : cette fonction exponentielle permet d'affirmer qu'à chaque augmentation du prix de 20 *euros*, le nombre d'acheteurs potentiels diminue de 33%.

En effet :

$N_1(x+20) = 10\,000\ e^{-0{,}02(x+20)} = 10\,000\ e^{-0{,}02x - 0{,}02 \times 20}$

$= 10\,000\ e^{-0{,}02\,x} \times e^{-0{,}02 \times 20} = N_1(x) \times e^{-0{,}4} \approx 0{,}67 \times N_1(x)$

$\approx (1-\frac{33}{100})N_1(x)$, pour tout x de [0 ; +∞ [

Ou :

Pour une augmentation de 40 euros (deux augmentations successives de 20 euros) ; on obtient de la même façon :

$N_1(x+40) = N_1(x) \times e^{-0{,}02 \times 40} \approx 0{,}45 \times N_1(x)$

$\approx (1-\frac{55}{100})N_1(x)$, pour tout x de [0 ; +∞ [

Cette baisse globale d'environ 55 % conduit à une baisse d'environ 33% pour chaque augmentation de 20 euros, d'après la question 1°) a).

Conclusion : Ā chaque augmentation du prix de 20 euros, le nombre d'acheteurs potentiels diminue d'environ 33 %.

c) $q^{20} = 0{,}67$

$q = \sqrt[20]{0{,}67}$ (ou $0{,}67^{1/20}$)

$q \approx 0{,}98$

2°) a) $u_{n+1} = u_n - \frac{2}{100} \times u_n = (1-\frac{2}{100})\, u_n = 0{,}98\, u_n$, pour tout entier naturel n

donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison q = 0,98.

b) $u_n = u_0\, q^n = 10\,000 \times 0{,}98^{\,n}$

c) $u_{100} = 10\,000 \times 0{,}98^{100} \approx 1\,326$

C. *Modèle continu*

1°) Les solutions de l'équation différentielle (*E*) sont les fonctions *f* définies sur l'intervalle [0 ; +∞ [par : $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}02x}$; k constante réelle

2°) $f(0) = 10\,000$

$k\,\mathrm{e}^{0} = 10\,000$

$k = 10\,000$

La solution de (*E*) qui vérifie la condition initiale est la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; +∞ [par : $f(x) = 10\,000\ \mathrm{e}^{-0{,}02x}$

D. *Étude d'une fonction*

1°) a) D'après le logiciel ; $B'(x) = -200\,(x - 105)\,\mathrm{e}^{-0{,}02x}$

$B'(x) \geq 0$

$-200\,(x - 105) \geq 0$ car $\mathrm{e}^{-0{,}02x} > 0$, pour tout x de $[0\,;300]$

$x - 105 \leq 0$

$x \leq 105$

x	0		105		300
Signe de $B'(x)$		+	0	–	

b)

x	0		105		300
Signe de $B'(x)$		+	0	–	
Variations de B			$500\,000\,\mathrm{e}^{-2,1}$		
	$-550\,000$				$2\,450\,000\,\mathrm{e}^{-6}$

2°) a) Le bénéfice en euros pour une paire de lunettes est le prix de vente diminué du coût de revient c'est-à-dire : $x - 55$.

On en déduit que le bénéfice en euros que peut réaliser la chaîne de magasins pour la vente de ces lunettes est $(x - 55)\,f(x) = B(x)$

b) D'après la question 1°) b) ; pour que le bénéfice soit maximal, il faut que le prix de vente des lunettes soit égal à 105 euros.

EXERCICE 2

A. *Loi normale*

1°) 0,95

2°) $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$; on utilise donc la colonne C :

$$1 - P(X \leq 149{,}12) > 0{,}96$$
$$1 - P(X \leq 149{,}13) < 0{,}96$$

Donc le plus grand nombre a tel que $P(X > a) > 0{,}96$ est (d'après la feuille de calcul) : 149,12

B. *Loi binomiale et loi de Poisson*

1°) a)

- On considère une épreuve de Bernoulli, qui consiste à prélever une seule branche de lunettes avec :
  - Succès : cette branche n'est pas acceptable de probabilité p = 0,02
  - Échec : l'évènement contraire.
- On répète 100 fois cette épreuve de façon identique et indépendante car tirage avec remise.
- La variable aléatoire Y compte le nombre de succès obtenus.
- Donc la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,02.

b) Au plus deux : $P(Y \leq 2) \approx 0{,}68$

2°) a) $\lambda = 100 \times 0{,}02 = 2$

b) $P(Y_1 \leq 2) \approx 0{,}68$

C. *Test d'hypothèse*

1°) $h = 2 \times 0{,}05 = 0{,}1$

2°) On prélève un échantillon aléatoire de 100 branches dans la production d'une journée et on calcule la moyenne $\overline{z}$ des longueurs des branches.

Si $\overline{z} \in [149{,}9 ; 150{,}1]$ alors on accepte l'hypothèse nulle H_0
Sinon, on rejette H_0
(Au seuil de signification de 0,05)

3°) $\overline{z} = 150{,}2 \notin [149{,}9 ; 150{,}1]$ donc on rejette l'hypothèse nulle H_0

Le contrôleur considère, au seuil de 0,05, que la moyenne des longueurs des branches de lunettes de type 3 produite dans la journée n'est pas égale à 150 mm.