BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

SESSION 2023

Note : ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité.

Corrigé proposé par M. DESHAYES, professeur de mathématiques à

l'institut et campus d'optique de Bures-sur-Yvette.

EXERCICE 1

Partie A – Étude d'une série statistique

1) Un ajustement affine de N en t n'est pas approprié car les points du graphique ne sont pas proches d'une droite.

2) a) r ≈ - 0,989

b) L'ajustement affine de z en t est justifié car le coefficient de corrélation linéaire de la série (t, z) est proche de -1.

3) $z = -0{,}80\,t + 4{,}83$

4) $z = \ln(415 - N) = -0{,}80t + 4{,}83$

$415 - N = e^{-0{,}80t + 4{,}83}$

$N = 415 - e^{-0{,}80t + 4{,}83}$

$N = 415 - e^{4{,}83} \times e^{-0{,}80t}$

N est de la forme $N = 415 - Ce^{-0{,}8t}$ avec $C = e^{4{,}83} \approx 125$

On a finalement : $N = 415 - 125e^{-0{,}8t}$

5) En 2023, $t = 6$ donc $N = 415 - 125\,e^{-0{,}80 \times 6} \approx 414$

Le nombre de montures vendues sera de 414 en 2023.

Partie B – Résolution d'une équation différentielle

1) Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions f définies sur l'intervalle [0 ; +∞[par $f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}t} = k\,e^{-0,8t}$ où $k \in \mathbb{R}$

2) * La fonction g est dérivable sur [0 ; +∞[et $g'(t) = 0$

   * *La fonction* g est solution de l'équation différentielle (E) donc
   $5\,g'(t) + 4\,g(t) = 1660$, pout tout t de [0 ; +∞[
   $0 + 4\,c = 1660$
   Donc $c = \dfrac{1660}{4} = 415$

3) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur l'intervalle [0 ; +∞[par $f(t) = k\,e^{-0,8t} + g(t) = k\,e^{-0,8t} + 415$ où $k \in \mathbb{R}$

4) $f(0) = 290$

$k\,e^{0} + 415 = 290$

$k = 290 - 415 = -125$

Conclusion : La fonction f recherchée est définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par :

$$f(t) = -125\,e^{-0,8t} + 415.$$

Partie C – Étude d'une fonction

1) La ligne 3 du logiciel de calcul formel fournit la limite de f en +∞, on en déduit que :
- La courbe Cf admet, en + ∞, une asymptote d'équation $y = 415$.
- À long terme, le nombre de montures vendues de ce modèle sera égal à 415 par an.

2) La ligne 1 du logiciel donne une expression de la dérivée de la fonction f :

$$f'(t) = 100\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}t}$$

$\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}t} > 0$, pour tout t de [0 ; +∞[donc $f'(t) > 0$, pour tout t de [0 ; +∞[

donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; +∞[.

3) La situation 2

Partie D – Étude d'une suite

1) $U_1 = 0{,}9\,U_0 + 50 = 0{,}9 \times 3000 + 500 = 3200$
   Donc 3200 clients en 2018

2) $V_{n+1} = U_{n+1} - 5000 = 0{,}9\,U_n + 500 - 5000 = 0{,}9\,U_n - 4500$

   Avec $V_n = U_n - 5000$ donc avec $U_n = V_n + 5000$

   $V_{n+1} = 0{,}9\,(V_n + 5000) - 4500 = 0{,}9\,V_n + 4500 - 4500$

   On obtient : $V_{n+1} = 0{,}9\,V_n$, pour tout entier n, donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

3) $V_n = V_0\,q^n = (U_0 - 5000) \times 0{,}9^n = -2000 \times 0{,}9^n$ pour tout entier naturel n.
4) $U_n = V_n + 5000 = 5000 - 2000 \times 0{,}9^n$; pour tout entier naturel n.
5) n = 6 en 2023
   $U_6 = 5000 - 2000 \times 0{,}9^6 \approx 3937$ donc 3937 clients en 2023
6)
   - La valeur de la variable n après l'exécution de cet algorithme est 8 car :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u	3000	3200	3380	3542	3687,8	3819,02	3937,118	4043,4062

   - Interprétation : si 3000 clients en 2017 et 3200 en 2018

année	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
n	1	2	3	4	5	6	7	8
u	3000	3200	3380	3542	3687,8	3819,02	3937,118	4043,4062

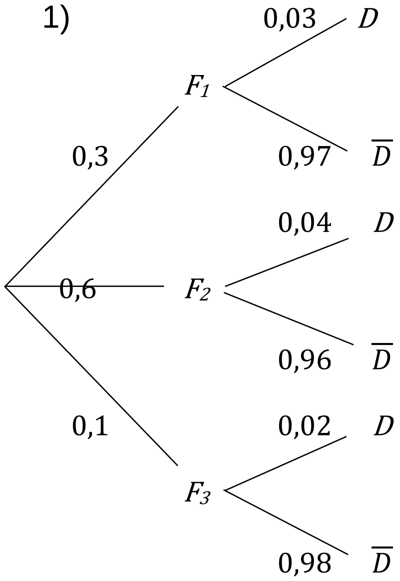
À partir de l'année 2024, le nombre de clients de l'entreprise est supérieur à 4000.

Remarque : si l'algorithme commençait par n ← 0 (pour l'année 2017) alors la valeur de la variable n après l'exécution de cet algorithme est 7 et l'interprétation est la même.

EXERCICE 2

Partie A. Probabilités conditionnelles

1)



1) $\mathrm{P}(F_1 \cap D) = 0{,}3 \times 0{,}03 = 0{,}009$
2) $\mathrm{P}(D) = 0{,}009 + 0{,}6 \times 0{,}04 + 0{,}1 \times 0{,}02 = 0{,}009 + 0{,}024 + 0{,}002 = 0{,}035$

3) $\mathrm{P_D}(F_1) = \dfrac{\mathrm{P}(F_1 \cap \mathrm{D})}{\mathrm{P(D)}} = \dfrac{0{,}009}{0{,}035} \approx 0{,}257$

Partie B. Loi binomiale et loi normale

1) a) La variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres $\mathrm{n} = 200$ et $\mathrm{p} = 0{,}035$

b) $P(6 \leq X \leq 10)$
$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$
$\approx 0{,}15090 + 0{,}15168 + 0{,}13272 + 0{,}10269 + 0{,}07114 \approx 0{,}609$

Ou plus rapidement :
$P(6 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 5) \approx 0{,}9053 - 0{,}2962 \approx 0{,}609$

Ou directement $P(6 \leq X \leq 10) \approx 0{,}609$ avec la calculatrice NUMWORKS

2) a) espérance : $\mathrm{np} = 200 \times 0{,}035 = 7$
écart type : $\sqrt{\mathrm{np}(1-\mathrm{p})} = \sqrt{200 \times 0{,}035 \times (1 - 0{,}035)} \approx 2{,}599$

b) $P(5{,}5 \leq Y \leq 10{,}5) \approx 0{,}629$

Interprétation : c'est une valeur approchée de la probabilité $\mathrm{P}(6 \leq X \leq 10)$, c'est-à-dire la probabilité que le nombre de verres semi-finis défectueux au sein de l'échantillon soit compris au sens large entre 6 et 10.

Partie C. Loi exponentielle

1) $\mathrm{E(T)}= \frac{1}{0,2} = 5$

   Sur un grand nombre d'appels, le temps d'attente est proche de 5 minutes

2) $\mathrm{P}(2 \leq \mathrm{T} \leq 4) = \mathrm{e}^{-0,2\times 2} - \mathrm{e}^{-0,2 \times 4} \approx 0,221$

Partie D. Estimation

1) $f = \frac{80}{100} = 0,8$

2) L'intervalle de confiance est : $\left[f - 1,65\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \; ; \; f + 1,65\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$

   Ce qui donne $\left[0,8 - 1,65\sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{100}} \; ; \; 0,8 + 1,65\sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{100}}\right]$

   $$\left[0,8 - 1,65\sqrt{\frac{0,16}{100}} \; ; \; 0,8 + 1,65\sqrt{\frac{0,16}{100}}\right]$$

   $$\left[0,8 - 0,066 \; ; \; 0,8 + 0,066\right]$$

L'intervalle de confiance recherché est : $\left[0,734 \; ; 0,866\right]$

3) $1,65\sqrt{\frac{0,16}{\mathrm{n}}} \leq 0,03$

   $\sqrt{\frac{0,16}{\mathrm{n}}} \leq \frac{0,03}{1,65}$

   $\frac{0,16}{n} \leq (\frac{0,03}{1,65})^2$

   $\frac{0,16}{(\frac{0,03}{1,65})^2} \leq \mathrm{n}$

   $\mathrm{n} \geq 484$

   Interprétation :

   Avec un échantillon d'au moins 484 clients sur lequel on obtiendrait une estimation ponctuelle de 0,8 et avec le même coefficient de confiance, l'intervalle de confiance serait alors $\left[0,8 - 0,03 \; ; 0,8 + 0,03\right]$.

   484 est la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,06 ou une estimation avec une marge d'erreur de 0,03.