

EXERCICE 1 (10 points)

Partie A – Série statistique

1. Un ajustement linéaire de N en t n'est pas pertinent car les points du graphique ne sont pas proches d'une droite.
2.
 - a. $z = \ln\left(\frac{4000}{3120} - 1\right) \approx -1,266$
 - b. $r < 0$ car les variables t et z varient en sens contraires (quand t augmente, z diminue)
 - c. $r \approx -0,999$
Un ajustement linéaire de z en t est pertinent car $r \approx -1$

d. $z = -1,6t + 2,0$

e.
$$N = \frac{4000}{1 + e^{-1,6t+2}}$$
$$e^{-1,6t+2} = e^{-1,6t} \cdot e^2 = C e^{-1,6t} \quad \text{avec } C = e^2 \approx 7$$
$$\text{Donc } N = \frac{4000}{1 + C e^{-1,6t}} \quad \text{avec } C \approx 7$$

Partie B – Équation différentielle

1. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions h définies sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(t) = k e^{-1,6t}$; $k \in \mathbb{R}$
2. $g'(t) = 0$
 g est solution de (E) donc $g'(t) + 1,6g(t) = 1,6$
$$0 + 1,6A = 1,6$$
$$\text{Donc } A = \frac{1,6}{1,6} = 1$$
3. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions h définies sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(t) = k e^{-1,6t} + g(t) = k e^{-1,6t} + 1$; $k \in \mathbb{R}$
4. $h(0) = 8$
$$k e^0 + 1 = 8$$
$$k + 1 = 8$$
$$k = 8 - 1 = 7$$

donc la fonction h est définie par $h(t) = 7e^{-1,6t} + 1$

Partie C – Étude d'une fonction

1. $f(3) \approx 3782$ donc le nombre de verres vendus en avril 2026 est 3 782.

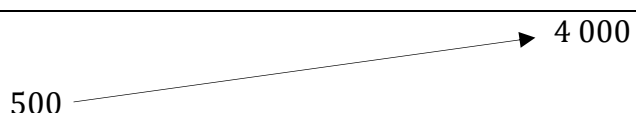
2.

a. D'après l'indication numéro 1, la courbe $\mathcal{C}$ admet, en $+\infty$, une asymptote d'équation $y = 4\,000$.

b. D'après l'indication numéro 2, $f'(t) = \frac{44\,800 e^{-1.6t}}{(1+7e^{-1.6t})^2}$

La fonction exponentielle est strictement positive donc $f'(t) > 0$, pour tout t de $[0 ; +\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$f(0) = 500$ donc le tableau de variation de la fonction f est :

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	+	
Variations de f		

c. D'après l'indication numéro 3, $\mathcal{T}$ a pour équation $y = 500 + 700t$

$$f(t) \approx 500 + 700t + 420t^2$$

Donc $f(t) - (500 + 700t) \approx 420t^2$ qui est strictement positif pour $t > 0$

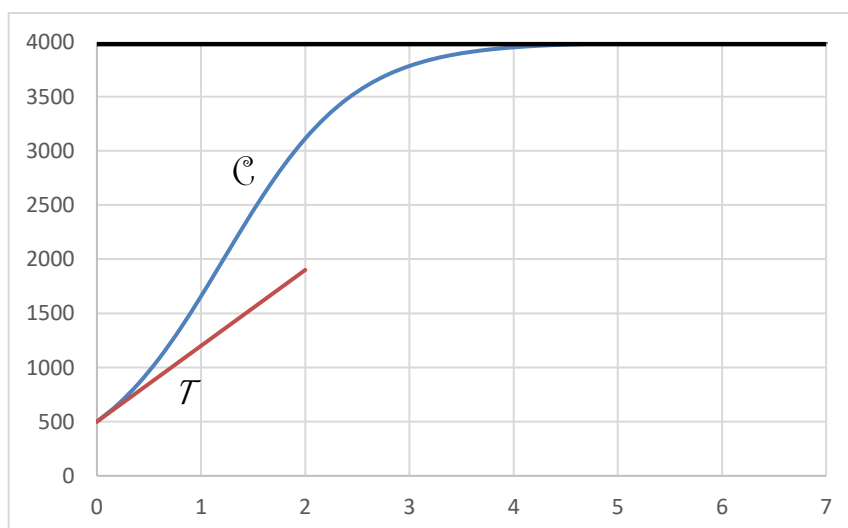
Donc, au voisinage de zéro, $f(t) > 500 + 700t$

Donc, au voisinage de zéro, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la tangente $\mathcal{T}$.

3. D'après le tableau de variation de la fonction f , $f(t) \leq 4\,000$

donc le chef d'entreprise n'a pas raison, on ne commercialisera jamais plus de 5 000 verres.

4. La courbe $\mathcal{C}$
avec l'asymptote
et la tangente $\mathcal{T}$



EXERCICE 2 (10 points)

Partie A – Probabilités conditionnelles

1.

	Montures présentant un défaut de Charnières	Montures <u>ne</u> présentant <u>pas</u> un défaut de Charnières	Total
Montures présentant un défaut de Batterie	10	50	60
Montures <u>ne</u> présentant <u>pas</u> un défaut de Batterie	20	920	940
Total	30	970	1 000

2. $P(C) = \frac{\text{nombre de montures présentant un défaut de Charnières}}{\text{nombre total de montures}} = \frac{30}{1\,000} = 0,03$

donc la probabilité que la monture choisie présente un défaut de charnières est égale à 0,03.

3. $P(\overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{920}{1\,000} = 0,92$ donc la probabilité que la monture choisie ne présente aucun défaut est égale à 0,92.

4. $P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{1\,000}}{\frac{60}{1\,000}} = \frac{0,01}{0,06} \approx 0,167$

Ou $P_B(C) = \frac{\text{nombre de montures présentant les deux défauts}}{\text{nombre de montures présentant un défaut de Batterie}} = \frac{10}{60} \approx 0,167$

Partie B – Loi binomiale

1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0,06$

2. $P(X \leq 9) \approx 0,587$ donc la probabilité qu'il y ait au maximum 9 montures présentant un défaut de batterie dans le colis est égale à 0,587.

3. $P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) \approx 1 - 0,883 \approx 0,117$

Ou $P(X > 12) = P(X \geq 13) \approx 0,117$

Donc la probabilité que le colis ne soit pas expédié est égale à 0,117

4. $E(X) = np = 150 \times 0,06 = 9$

Sur un grand nombre de colis, le nombre moyen de montures dans un colis présentant un défaut de batterie est proche de 9.

Partie C – Loi normale

1. $\mu = 720$

2. L'aire grisée correspond à une probabilité de 0,95

$$\text{Donc } P(670 \leq Y \leq 770) = P(720 - 50 \leq Y \leq 720 + 50) = 0,95$$

Et on sait que, pour toute loi normale, $P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$

On en déduit : $2\sigma \approx 50$ et finalement $\sigma \approx \frac{50}{2}$

Donc l'écart-type σ est environ égal à 25

3. $P(Y \geq 720) \approx 0,5$

$$P(Y \leq 770) \approx 1 - \frac{0,05}{2} \approx 0,975 \quad \text{par symétrie de la gaussienne}$$

(Ou $P(Y \leq 770) \approx 0,977$ à 10^{-3} à la calculatrice)

$$P(Y \leq 670) \approx \frac{0,05}{2} \approx 0,025 \quad \text{par symétrie de la gaussienne}$$

(Ou $P(Y \leq 670) \approx 0,023$ à 10^{-3} à la calculatrice)

Partie D – Intervalle de confiance

1. Une estimation ponctuelle de p est : $f = \frac{616}{800} = 0,77$

2. L'intervalle de confiance est : $\left[f - 1,96 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + 1,96 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$

$$\text{Ce qui donne } \left[0,77 - 1,96 \sqrt{\frac{0,77(1-0,77)}{800}} ; 0,77 + 1,96 \sqrt{\frac{0,77(1-0,77)}{800}} \right]$$

$$\text{puis } [0,77 - 0,03 ; 0,77 + 0,03]$$

L'intervalle de confiance recherché est : $[0,74 ; 0,80]$

3. L'intervalle de confiance obtenu à la question 2 est modifié car la valeur de n est modifiée ; même si l'estimation ponctuelle est identique. ($\frac{154}{200} = 0,77$)

n étant plus petit, l'amplitude de l'intervalle de confiance est plus grande.

$$\text{(on trouve comme intervalle : } [0,77 - 1,96 \sqrt{\frac{0,77(1-0,77)}{200}} ; 0,77 + 1,96 \sqrt{\frac{0,77(1-0,77)}{200}}])$$

$$\text{puis } [0,77 - 0,06 ; 0,77 + 0,06] \text{ et finalement } [0,71 ; 0,83])$$